

und.1 Verificando a Representação

tur:und:ver:
sec

A fim de verificar que nossa representação funciona, temos de provar duas coisas. Primeiro, temos de mostrar que se M para na entrada w , então $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida. Em seguida, temos de mostrar a recíproca, isto é, que se $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida, então M de fato eventualmente para quando executada na entrada w .

explanation

A estratégia para prová-las é bem diferente. Para o primeiro resultado, temos de mostrar que a **sentença** da lógica de primeira ordem (a saber, $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$) é válida. A maneira mais fácil de fazer isso é dar a **derivação**. Nossa prova, porém, deve funcionar para todos os M e w , de modo que não há realmente uma única **sentença** para a qual tenhamos de dar a **derivação**, mas infinitas. Assim, o melhor que podemos fazer é provar por indução que, sejam quais forem M e w , e por mais passos que M leve para parar na entrada w , haverá a **derivação** de $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$.

Naturalmente, nossa indução procederá sobre o número de passos que M leva antes de atingir uma configuração de parada. Em nossa prova indutiva, estabeleceremos que para cada passo n da execução de M na entrada w , $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$, em que $\chi(M, w, n)$ descreve corretamente a configuração de M executada em w após n passos. Ora, se M para na entrada w após, digamos, n passos, $\chi(M, w, n)$ descreverá uma configuração de parada. Mostraremos também que $\chi(M, w, n) \models \alpha(M, w)$ sempre que $\chi(M, w, n)$ descreve uma configuração de parada. Assim, se M para na entrada w , então para algum n , M estará em uma configuração de parada após n passos. Logo, $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$ em que $\chi(M, w, n)$ descreve uma configuração de parada, e como nesse caso $\chi(M, w, n) \models \alpha(M, w)$, obtemos que $\tau(M, w) \models \alpha(M, w)$, isto é, que $\models \tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$.

A estratégia para a recíproca é bem diferente. Aqui supomos que $\models \tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ e temos de provar que M para na entrada w . Da hipótese obtemos que $\tau(M, w) \models \alpha(M, w)$, isto é, $\alpha(M, w)$ é verdadeira em toda **estrutura** em que $\tau(M, w)$ é verdadeira. Assim, descreveremos a **estrutura** $\mathfrak{M}$ em que $\tau(M, w)$ é verdadeira: seu domínio será $\mathbb{N}$, e a interpretação de todos os Q_q e S_σ será dada pelas configurações de M durante uma execução na entrada w . Assim, por exemplo, $\mathfrak{M} \models Q_q(\bar{m}, \bar{n})$ se, e somente se, T , quando executada na entrada w por n passos, está no estado q e examinando o quadrado m . Ora, como $\tau(M, w) \models \alpha(M, w)$ por hipótese, e como $\mathfrak{M} \models \tau(M, w)$ por construção, $\mathfrak{M} \models \alpha(M, w)$. Mas $\mathfrak{M} \models \alpha(M, w)$ se, e somente se, há algum $n \in |\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$ tal que M , executada na entrada w , está em uma configuração de parada após n passos.

Definição und.1. Seja $\chi(M, w, n)$ a **sentença**

$$Q_q(\bar{m}, \bar{n}) \wedge S_{\sigma_0}(\bar{0}, \bar{n}) \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_k}(\bar{k}, \bar{n}) \wedge \forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}))$$

em que q é o estado de M no instante n , M está examinando o quadrado m no instante n , o quadrado i contém o símbolo σ_i no instante n para $0 \leq i \leq k$,

e k é o quadrado não-vazio mais à direita da fita no instante 0, ou o quadrado mais à direita que o cabeçote de fita visitou após n passos, o que for maior.

Lema und.2. *Se M executada na entrada w está em uma configuração de parada após n passos, então $\chi(M, w, n) \models \alpha(M, w)$.*

tur:und:ver:
lem:halt-config-implies-halt

Prova. Suponha que M pare para a entrada w após n passos. Há algum estado q , quadrado m e símbolo σ tais que:

1. Após n passos, M está no estado q examinando o quadrado m no qual aparece σ .
2. A função de transição $\delta(q, \sigma)$ é indefinida.

$\chi(M, w, n)$ é a descrição dessa configuração e incluirá as cláusulas $Q_q(\overline{m}, \overline{n})$ e $S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})$. Essas cláusulas juntas implicam $\alpha(M, w)$:

$$\exists x \exists y \left(\bigvee_{\langle q, \sigma \rangle \in X} (Q_q(x, y) \wedge S_\sigma(x, y)) \right)$$

já que $Q_{q'}(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_{\sigma'}(\overline{m}, \overline{n}) \models \bigvee_{\langle q, \sigma \rangle \in X} (Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m}, \overline{n}))$, pois $\langle q', \sigma' \rangle \in X$. $\square$

explanation

Assim, se M para na entrada w , então há algum n tal que $\chi(M, w, n) \models \alpha(M, w)$. Mostraremos agora que para qualquer instante n , $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$.

Lema und.3. *Para cada n , se M não parou após n passos, $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$.*

tur:und:ver:
lem:config

Prova. Base da indução: Se $n = 0$, então as fórmulas componentes de $\chi(M, w, 0)$ são também fórmulas componentes de $\tau(M, w)$, logo implicadas por ela.

Hipótese de indução: Se M não parou antes do n -ésimo passo, então $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$. Temos de mostrar que (a menos que $\chi(M, w, n)$ descreva uma configuração de parada), $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n + 1)$.

Suponha $n > 0$ e que, após n passos, M iniciada em w esteja no estado q examinando o quadrado m . Como M não para após n passos, deve haver no programa de M uma instrução de uma das três formas seguintes:

1. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', R \rangle$
2. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', L \rangle$
3. $\delta(q, \sigma) = \langle q', \sigma', N \rangle$

tur:und:ver:
right

tur:und:ver:
left

tur:und:ver:
stay

Consideraremos cada um desses três casos por sua vez.

1. Suponha que haja uma instrução da forma (1). Por ????, isso significa que

$$\forall x \forall y ((Q_q(x, y) \wedge S_\sigma(x, y)) \rightarrow (Q_{q'}(x', y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y)))$$

é uma fórmula componente de $\tau(M, w)$. Isso implica a seguinte **sentença** (instanciação universal, $\bar{m}$ por x e $\bar{n}$ por y):

$$(Q_q(\bar{m}, \bar{n}) \wedge S_\sigma(\bar{m}, \bar{n})) \rightarrow (Q_{q'}(\bar{m}', \bar{n}') \wedge S_{\sigma'}(\bar{m}, \bar{n}') \wedge \varphi(\bar{m}, \bar{n})).$$

Por hipótese de indução, $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$, isto é,

$$Q_q(\bar{m}, \bar{n}) \wedge S_{\sigma_0}(\bar{0}, \bar{n}) \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_k}(\bar{k}, \bar{n}) \wedge \forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}))$$

Como após n passos o quadrado de fita m contém σ , a fórmula componente correspondente é $S_\sigma(\bar{m}, \bar{n})$, de modo que isso implica:

$$Q_q(\bar{m}, \bar{n}) \wedge S_\sigma(\bar{m}, \bar{n})$$

Obtemos agora

$$Q_{q'}(\bar{m}', \bar{n}') \wedge S_{\sigma'}(\bar{m}, \bar{n}') \wedge S_{\sigma_0}(\bar{0}, \bar{n}') \wedge \cdots \wedge S_{\sigma_k}(\bar{k}, \bar{n}') \wedge \forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$$

como segue: A primeira linha vem diretamente do consequente do condicional precedente, por modus ponens. Cada fórmula componente na linha do meio—que exclui $S_{\sigma_m}(\bar{m}, \bar{n}')$ —decorre da fórmula componente correspondente em $\chi(M, w, n)$ junto com $\varphi(\bar{m}, \bar{n})$.

Se $m < k$, $\tau(M, w) \vdash \bar{m} < \bar{k}$ (??) e, por transitividade de $<$, temos $\forall x (\bar{k} < x \rightarrow \bar{m} < x)$. Se $m = k$, então $\forall x (\bar{k} < x \rightarrow \bar{m} < x)$ apenas por lógica. A última linha decorre então da fórmula componente correspondente em $\chi(M, w, n)$, de $\forall x (\bar{k} < x \rightarrow \bar{m} < x)$ e de $\varphi(\bar{m}, \bar{n})$. Se $m < k$, isto já é $\chi(M, w, n + 1)$.

Agora suponha $m = k$. Nesse caso, após $n + 1$ passos, o cabeçote de fita também visitou o quadrado $k + 1$, que agora é o quadrado mais à direita visitado. Assim, $\chi(M, w, n + 1)$ tem uma nova fórmula componente, $S_0(\bar{k}', \bar{n}')$, e a última fórmula componente é $\forall x (\bar{k}' < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$. Temos de verificar que essas duas **sentenças** também são implicadas.

Já temos $\forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$. Em particular, isso nos dá $\bar{k} < \bar{k}' \rightarrow S_0(\bar{k}', \bar{n}')$. Do axioma $\forall x x < x'$ obtemos $\bar{k} < \bar{k}'$. Por modus ponens, segue-se $S_0(\bar{k}', \bar{n}')$.

Além disso, como $\tau(M, w) \vdash \bar{k} < \bar{k}'$, o axioma da transitividade de $<$ nos dá $\forall x (\bar{k}' < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$. (Deixamos a verificação disso como exercício.)

2. Suponha que haja uma instrução da forma (2). Então, por ????,

$$\begin{aligned} & \forall x \forall y ((Q_q(x', y) \wedge S_\sigma(x', y)) \rightarrow \\ & \quad (Q_{q'}(x, y') \wedge S_{\sigma'}(x', y') \wedge \varphi(x, y))) \wedge \\ & \forall y ((Q_{q_i}(\bar{0}, y) \wedge S_\sigma(\bar{0}, y)) \rightarrow \\ & \quad (Q_{q_j}(\bar{0}, y') \wedge S_{\sigma'}(\bar{0}, y') \wedge \varphi(\bar{0}, y))) \end{aligned}$$

é uma fórmula componente de $\tau(M, w)$. Se $m > 0$, então seja $l = m - 1$ (isto é, $m = l + 1$). A primeira fórmula componente da **sentença** acima implica o seguinte:

$$\begin{aligned} & (Q_q(\bar{l}', \bar{n}) \wedge S_\sigma(\bar{l}', \bar{n})) \rightarrow \\ & \quad (Q_{q'}(\bar{l}, \bar{n}') \wedge S_{\sigma'}(\bar{l}', \bar{n}') \wedge \varphi(\bar{l}, \bar{n})) \end{aligned}$$

Caso contrário, seja $l = m = 0$ e considere a seguinte **sentença** implicada pela segunda fórmula componente:

$$\begin{aligned} & ((Q_{q_i}(\bar{0}, \bar{n}) \wedge S_\sigma(\bar{0}, \bar{n})) \rightarrow \\ & \quad (Q_{q_j}(\bar{0}, \bar{n}') \wedge S_{\sigma'}(\bar{0}, \bar{n}') \wedge \varphi(\bar{0}, \bar{n}))) \end{aligned}$$

Qualquer das sentenças implica

$$\begin{aligned} & Q_{q'}(\bar{l}, \bar{n}') \wedge S_{\sigma'}(\bar{m}, \bar{n}') \wedge \\ & \quad S_{\sigma_0}(\bar{0}, \bar{n}') \wedge \dots \wedge S_{\sigma_k}(\bar{k}, \bar{n}') \wedge \\ & \quad \forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}')) \end{aligned}$$

como antes. (Note que no primeiro caso, $\bar{l}' \equiv \overline{l+1} \equiv \bar{m}$ e no segundo caso $\bar{l} \equiv \bar{0}$.) Mas isto é justamente $\chi(M, w, n+1)$.

3. O caso (3) é deixado como exercício.

Mostramos que para qualquer n , $\tau(M, w) \models \chi(M, w, n)$. □

Problema und.1. Complete o caso (3) da prova de **Lema und.3**.

Problema und.2. Dê a **derivação** de $S_{\sigma_i}(\bar{i}, \bar{n}')$ a partir de $S_{\sigma_i}(\bar{i}, \bar{n})$ e $\varphi(m, n)$ (supondo $i \neq m$, isto é, $i < m$ ou $m < i$).

Problema und.3. Dê a **derivação** de $\forall x (\bar{k}' < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$ a partir de $\forall x (\bar{k} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n}'))$, $\forall x x < x'$ e $\forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$.

Lema und.4. Se M para na entrada w , então $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida.

tur:und:ver:
lem:valid-if-halt

Prova. Por **Lema und.3**, sabemos que, para qualquer instante n , a descrição $\chi(M, w, n)$ da configuração de M no instante n é implicada por $\tau(M, w)$. Suponha que M pare após k passos. Nesse ponto, ela estará examinando o quadrado m , para algum $m \in \mathbb{N}$. Então $\chi(M, w, k)$ descreve uma configuração de parada de M , isto é, contém como fórmulas componentes tanto $Q_q(\overline{m}, \overline{k})$ quanto $S_\sigma(\overline{m}, \overline{k})$ com $\delta(q, \sigma)$ indefinida. Assim, por **Lema und.2**, $\chi(M, w, k) \models \alpha(M, w)$. Mas como $\tau(M, w) \models \chi(M, w, k)$, temos $\tau(M, w) \models \alpha(M, w)$ e portanto $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida. $\square$

Para completar a verificação de nossa afirmação, temos também de estabelecer a direção reversa: se $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida, então M de fato para quando iniciada na entrada w . explanation

tur:und:ver: **Lema und.5.** *Se $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$, então M para na entrada w .*
lem:halt-if-valid

Prova. Considere a $\mathcal{L}_M$ -**estrutura** $\mathfrak{M}$ com domínio $\mathbb{N}$ que interpreta o como 0, ι como a função sucessor e $<$ como a relação menor-que, e os predicados Q_q e S_σ como segue:

$$Q_q^{\mathfrak{M}} = \{ \langle m, n \rangle : \begin{array}{l} \text{iniciada em } w, \text{ após } n \text{ passos,} \\ M \text{ está no estado } q \text{ examinando o quadrado } m \end{array} \}$$

$$S_\sigma^{\mathfrak{M}} = \{ \langle m, n \rangle : \begin{array}{l} \text{iniciada em } w, \text{ após } n \text{ passos,} \\ \text{o quadrado } m \text{ de } M \text{ contém o símbolo } \sigma \end{array} \}$$

Em outras palavras, construímos a **estrutura** $\mathfrak{M}$ de modo que ela descreva o que M iniciada na entrada w de fato faz, passo a passo. Claramente, $\mathfrak{M} \models \tau(M, w)$. Se $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$, então também $\mathfrak{M} \models \alpha(M, w)$, isto é,

$$\mathfrak{M} \models \exists x \exists y (\bigvee_{\langle q, \sigma \rangle \in X} (Q_q(x, y) \wedge S_\sigma(x, y))).$$

Como $|\mathfrak{M}| = \mathbb{N}$, deve haver $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $\mathfrak{M} \models Q_q(\overline{m}, \overline{n}) \wedge S_\sigma(\overline{m}, \overline{n})$ para algum q e σ tais que $\delta(q, \sigma)$ é indefinida. Pela definição de $\mathfrak{M}$, isso significa que M iniciada na entrada w após n passos está no estado q e lendo o símbolo σ , e a função de transição é indefinida, isto é, M parou. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas