

und.1 Teorema de Trakhtenbrot

tur:und:tra:
sec

Na ?? definimos as **sentenças** $\tau(M, w)$ e $\alpha(M, w)$ para uma máquina de Turing M e uma cadeia de entrada w . Em seguida, mostramos em ?? e ?? que $\tau(M, w) \rightarrow \alpha(M, w)$ é válida se, e somente se, M , iniciada na entrada w , eventualmente para. Como o Problema da Parada é indecidível, isso implica que a validade e a satisfatibilidade de **sentenças** da lógica de primeira ordem são indecidíveis (????).

explanation

Mas a validade e a satisfatibilidade de sentenças são definidas para **estruturas** arbitrárias, finitas ou infinitas. Você poderia suspeitar que é mais fácil decidir se **a sentença** é satisfatível em uma **estrutura** finita (ou válida em todas as **estruturas** finitas). Podemos adaptar a prova da insolubilidade do problema da decisão de modo que ela mostre que não é esse o caso.

Primeiro, se você voltar à prova de ??, verá que o que fizemos ali foi produzir um modelo $\mathfrak{M}$ de $\tau(M, w)$ que descreve exatamente o que a máquina M faz quando iniciada na entrada w . O domínio daquele modelo era $\mathbb{N}$, isto é, infinito. Mas se M de fato para na entrada w , podemos construir um modelo finito $\mathfrak{M}'$ da mesma maneira. Suponha que M iniciada na entrada w pare após k passos. Tome como domínio $|\mathfrak{M}'|$ o conjunto $\{0, \dots, n\}$, em que n é o maior entre k e o comprimento de w , e seja

$$r^{\mathfrak{M}'}(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x < n \\ n & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e $\langle x, y \rangle \in <^{\mathfrak{M}'}$ se, e somente se, $x < y$ ou $x = y = n$. Quanto ao resto, $\mathfrak{M}'$ é definida tal como $\mathfrak{M}$. Pela definição de $\mathfrak{M}'$, tal como na prova de ??, $\mathfrak{M}' \models \tau(M, w)$. E como supusemos que M para na entrada w , $\mathfrak{M}' \models \alpha(M, w)$. Assim, $\mathfrak{M}'$ é um modelo finito de $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ (note que substituímos $\rightarrow$ por $\wedge$).

Estamos a meio caminho de uma prova: mostramos que se M para na entrada w , então $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ tem um modelo finito. Infelizmente, a recíproca disso não vale, isto é, há máquinas de Turing que não param em alguma entrada w , mas $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ ainda assim tem um modelo finito. Por exemplo, considere a máquina M com o único estado q_0 e a instrução $\delta(q_0, 0) = \langle q_0, 0, N \rangle$. Iniciada na entrada vazia $w = \Lambda$, essa máquina nunca para: está em um laço infinito, mas não altera a fita nem move o cabeçote. Todas as configurações são as mesmas (mesmo estado, mesma posição do cabeçote, mesmo conteúdo da fita). Podemos definir uma **estrutura** finita $\mathfrak{M}''$ que satisfaz $\tau(M, \Lambda) \wedge \alpha(M, \Lambda)$ (exercício). Podemos, no entanto, modificar $\tau(M, w)$ de modo adequado para que tais **estruturas** sejam descartadas.

Problema und.1. Seja M uma máquina de Turing com o único estado q_0 e a única instrução $\delta(q_0, 0) = \langle q, 0, N \rangle$. Seja $|\mathfrak{M}''| = \{0, 1, 2\}$, $r^{\mathfrak{M}''}(0) = r^{\mathfrak{M}''}(1) = 1$ e $r^{\mathfrak{M}''}(2) = 2$, e $<^{\mathfrak{M}''} = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$. Defina $Q_{q_0}^{\mathfrak{M}''}$, $S_0^{\mathfrak{M}''}$ e $S_{\triangleright}^{\mathfrak{M}''}$ de modo que $\tau(M, \Lambda)$ e $\alpha(M, \Lambda)$ se tornem verdadeiras e explique por que o são.

Dica: Observe que $\delta(q_0, \triangleright)$ é indefinida. Garanta que

$$Q_{q_0}(\bar{1}, \bar{n}) \wedge S_{\triangleright}(\bar{0}, \bar{n}) \wedge \forall x (\bar{0} < x \rightarrow S_0(x, \bar{n})) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\exists y (Q_{q_0}(\bar{0}, y) \wedge S_{\triangleright}(\bar{0}, y))$$

são ambas verdadeiras em $\mathfrak{M}''$.

Considere as **sentenças** que descrevem a operação da máquina de Turing M na entrada $w = \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k}$:

1. Axiomas que descrevem números e $<$ (tal como na definição de $\tau(M, w)$ na ??).
2. Axiomas que descrevem a configuração de entrada: tal como na definição de $\tau(M, w)$.
3. Axiomas que descrevem a transição de uma configuração para a seguinte:

Para o que segue, seja $\varphi(x, y)$ como antes, e seja

$$\psi(y) \equiv \forall x (x < y \rightarrow x \neq y).$$

- a) Para toda instrução $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', R \rangle$, a **sentença**:

tur:und:tra:
rep-right

$$\forall x \forall y ((Q_{q_i}(x, y) \wedge S_{\sigma}(x, y)) \rightarrow$$

$$(Q_{q_j}(x', y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y) \wedge \psi(y')))$$

- b) Para toda instrução $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', L \rangle$, a **sentença**

tur:und:tra:
rep-left

$$\forall x \forall y ((Q_{q_i}(x', y) \wedge S_{\sigma}(x', y)) \rightarrow$$

$$(Q_{q_j}(x, y') \wedge S_{\sigma'}(x', y') \wedge \varphi(x, y))) \wedge$$

$$\forall y ((Q_{q_i}(\bar{0}, y) \wedge S_{\sigma}(\bar{0}, y)) \rightarrow$$

$$(Q_{q_j}(\bar{0}, y') \wedge S_{\sigma'}(\bar{0}, y') \wedge \varphi(\bar{0}, y) \wedge \psi(y')))$$

- c) Para toda instrução $\delta(q_i, \sigma) = \langle q_j, \sigma', N \rangle$, a **sentença**:

tur:und:tra:
rep-stay

$$\forall x \forall y ((Q_{q_i}(x, y) \wedge S_{\sigma}(x, y)) \rightarrow$$

$$(Q_{q_j}(x, y') \wedge S_{\sigma'}(x, y') \wedge \varphi(x, y) \wedge \psi(y')))$$

Como você pode ver, as **sentenças** que descrevem as transições de M são as mesmas que a **sentença** correspondente em $\tau(M, w)$, exceto que adicionamos $\psi(y')$ ao final. $\psi(y')$ garante que o número y' da “próxima” configuração é diferente de todos os números anteriores $0, 0', \dots$.

Seja $\tau'(M, w)$ a conjunção de todas as **sentenças** acima para a máquina de Turing M e a entrada w .

Lema und.1. *Se M iniciada na entrada w para, então $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ tem um modelo finito.*

tur:und:tra:
lem:halts-sat

Prova. Seja $\mathfrak{M}'$ como na prova de ??, exceto que

$$\begin{aligned} |\mathfrak{M}'| &= \{0, \dots, n\}, \\ \rho^{\mathfrak{M}'}(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{se } x < n \\ n & \text{caso contrário,} \end{cases} \\ \langle x, y \rangle &\in <^{\mathfrak{M}'} \text{ sse } x < y \text{ ou } x = y = n, \end{aligned}$$

em que $n = \max(k, \text{len}(w))$ e k é o menor número tal que M iniciada na entrada w parou após k passos. Deixamos como exercício a verificação de que $\mathfrak{M}' \models \tau'(M, w) \wedge E(M, w)$. $\square$

Problema und.2. Complete a prova de **Lema und.1** provando que $\mathfrak{M}' \models \tau(M, w) \wedge E(M, w)$.

tur:und:tra: **Lema und.2.** Se $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ tem um modelo finito, então M iniciada na entrada w para. *lem:sat-halts*

Prova. Mostramos a contrapositiva. Suponha que M iniciada em w não pare. Se $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ não tem modelo algum, terminamos. Então suponha que $\mathfrak{M}$ seja um modelo de $\tau(M, w) \wedge \alpha(M, w)$. Temos de mostrar que ele não pode ser finito.

Podemos provar, tal como em ??, que se M , iniciada na entrada w , não parou após n passos, então $\tau'(M, w) \models \chi(M, w, n) \wedge \psi(\bar{n})$. Como M iniciada na entrada w não para, $\tau'(M, w) \models \chi(M, w, n) \wedge \psi(\bar{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que, por ??, $\tau'(M, w) \models \bar{k} < \bar{n}$ para todo $k < n$. Além disso, $\psi(\bar{n}) \models \bar{k} < \bar{n} \rightarrow \bar{k} \neq \bar{n}$. Assim, $\mathfrak{M} \models \bar{k} \neq \bar{n}$ para todo $k < n$, isto é, os infinitos termos $\bar{k}$ devem ter todos valores diferentes em $\mathfrak{M}$. Mas isso requer que $|\mathfrak{M}|$ seja infinito, de modo que $\mathfrak{M}$ não pode ser um modelo finito de $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$. $\square$

Problema und.3. Complete a prova de **Lema und.2** provando que se M , iniciada na entrada w , não parou após n passos, então $\tau'(M, w) \models \psi(\bar{n})$.

tur:und:tra: **Teorema und.3 (Teorema de Trakhtenbrot).** É indecidível se uma *sen-* *thm:trakhtenbrot:* *tença* arbitrária da lógica de primeira ordem tem um modelo finito (isto é, é finitamente satisfatível).

Prova. Suponha que houvesse uma máquina de Turing F que decide o problema da satisfatibilidade finita. Então, dada qualquer máquina de Turing M e entrada w , poderíamos computar a sentença $\tau'(M, w) \wedge \alpha(M, w)$ e usar F para decidir se ela tem um modelo finito. Por **Lemas und.1** e **und.2**, ela tem se, e somente se, M iniciada na entrada w para. Assim, poderíamos usar F para resolver o problema da parada, que sabemos ser insolúvel. $\square$

tur:und:tra: **Corolário und.4.** Não pode haver um sistema de *derivação* que seja correto e completo para a validade finita, isto é, um sistema de *derivação* que tenha *cor:proof-incomp* $\vdash \psi$ se, e somente se, $\mathfrak{M} \models \psi$ para toda *estrutura* finita $\mathfrak{M}$.

Prova. Exercício.

□

Problema und.4. Prove **Corolário und.4**. Observe que ψ é satisfeita em toda **estrutura** finita se, e somente se, $\neg\psi$ não é finitamente satisfatível. Explique por que a satisfatibilidade finita é semidecidível no sentido de ???. Use isso para argumentar que se houvesse um sistema de **derivação** para a validade finita, então a satisfatibilidade finita seria decidível.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas