

Figura 1: Uma máquina que computa  $f(x, y) = x + y$

tur:mac:una:  
fig:adder

## mac.1 Representação Unária de Números

tur:mac:una:  
sec

As máquinas de Turing trabalham sobre seqüências de símbolos escritos em sua fita. Dependendo do alfabeto que uma máquina de Turing usa, essas seqüências de símbolos podem representar diversas entradas e saídas. De particular interesse, é claro, estão as máquinas de Turing que computam funções *aritméticas*, isto é, funções de números naturais. Uma maneira simples de representar inteiros positivos é codificá-los como seqüências de um único símbolo 1. Se  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $1^n$  a seqüência vazia se  $n = 0$ , e caso contrário a seqüência composta de exatamente  $n$  1.

explanation

**Definição mac.1 (Computação).** Uma máquina de Turing  $M$  computa a função  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  sse  $M$  para com a entrada

$$1^{n_1}01^{n_2}0 \dots 01^{n_k}$$

produzindo a saída  $1^{f(n_1, \dots, n_k)}$ .

**Problema mac.1.** Dê uma definição para quando uma máquina de Turing  $M$  computa a função  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^m$ .

tur:mac:una:  
ex:adder

**Exemplo mac.2. Adição:** Vamos construir uma máquina que computa a função  $f(n, m) = n + m$ . Isso requer uma máquina que comece com dois blocos de 1 de comprimento  $n$  e  $m$  na fita, e pare com um único bloco composto de  $n + m$  1. Os dois blocos de entrada de 1 estão separados por um 0, então um método seria escrever um traço no quadrado que contém o 0, e apagar o último 1.

**Problema mac.2.** Rastreie as configurações da máquina de **Exemplo mac.2** para a entrada  $\langle 3, 2 \rangle$ . O que acontece se a máquina computa  $0 + 0$ ?

Em ??, demos um exemplo de uma máquina de Turing que recebe como entrada uma seqüência de 1 e para com uma seqüência de duas vezes mais 1 na fita—a máquina duplicadora. No entanto, como a saída contém 0 à esquerda do bloco duplicado de 1, ela não computa de fato a função  $f(x) = 2x$ , como você poderia ter suposto. Descreveremos duas maneiras de corrigir isso.

explanation

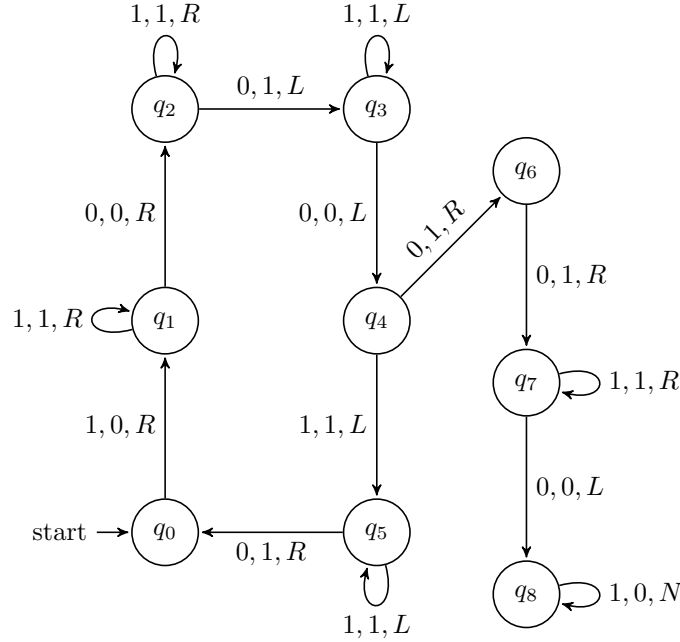


Figura 2: Uma máquina que computa  $f(x) = 2x$

**Exemplo mac.3.** A máquina em **Figura 2** computa a função  $f(x) = 2x$ . Em vez de apagar a entrada e escrever dois 1 na extremidade direita para cada 1 da entrada, como faz a máquina de ??, esta máquina adiciona um único 1 à direita para cada 1 da entrada. Ela precisa rastrear onde a entrada termina, então deixa um 0 entre a entrada e os traços adicionados, que ela preenche com um 1 bem ao final. E temos que “lembrar” onde estamos na entrada, então substituímos temporariamente um 1 do bloco de entrada por um 0.

tur:mac:una:  
fig:doubler-disc

**Exemplo mac.4.** Uma segunda possibilidade para computar  $f(x) = 2x$  é manter a máquina duplicadora original, mas adicionar estados e instruções ao final que movam o bloco duplicado de traços para a extremidade esquerda da fita. A máquina em **Figura 3** faz exatamente esta última parte: iniciada em uma fita composta de um bloco de 0 seguido de um bloco de 1 (e com a cabeça posicionada em qualquer lugar do bloco de 0), ela apaga os 1 um a um e os escreve no início da fita. Para conseguir saber quando ela termina, primeiro marca o fim do bloco de 1 com um símbolo ▷, que é apagado ao final. Começamos a numerar os estados em  $q_6$ , de modo que possam ser adicionados à máquina duplicadora. Tudo de que você precisará é uma instrução adicional  $\delta(q_0, 0) = \langle q_6, 0, N \rangle$ , isto é, uma seta de  $q_0$  para  $q_6$  rotulada  $0, 0, N$ . (Há um

tur:mac:una:  
ex:mover

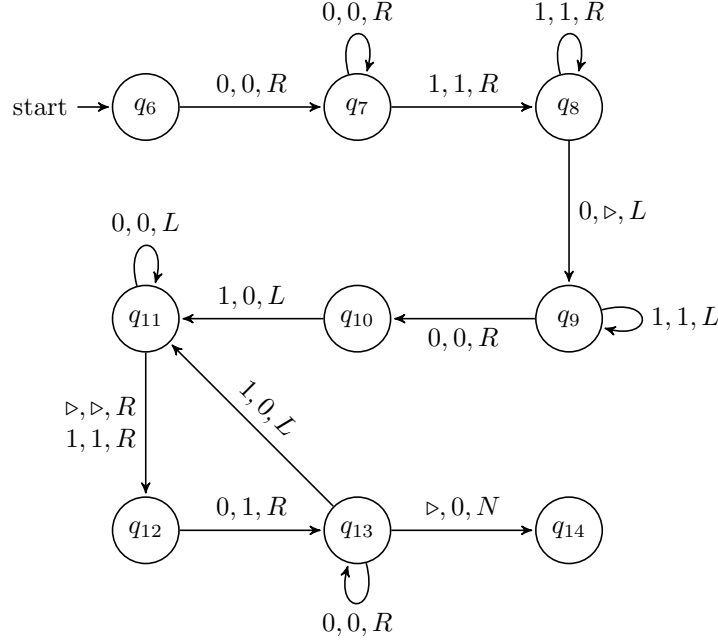


Figura 3: Movendo um bloco de 1 para a esquerda

tur:mac:una:  
fig:mover

problema sutil: a máquina resultante não funciona para a entrada  $x = 0$ . Deixaremos isso como exercício.)

**Problema mac.3.** Em [Exemplo mac.4](#) descrevemos uma máquina composta de uma combinação da máquina duplicadora de [Figura 2](#) e da máquina move-dora de [Figura 3](#). O que acontece se você inicia essa máquina combinada com a entrada  $x = 0$ , isto é, em uma fita vazia? Como você corrigiria a máquina de modo que, nesse caso, ela parasse com saída  $2x = 0$ ? (Você deve conseguir fazer isso adicionando um estado e uma transição.)

**Problema mac.4.** *Subtração:* Projete uma máquina de Turing que, ao receber uma entrada de duas cadeias não vazias de traços de comprimento  $n$  e  $m$ , em que  $n > m$ , compute a função  $f(n, m) = n - m$ .

**Problema mac.5.** *Igualdade:* Projete uma máquina de Turing para computar a seguinte função:

$$\text{igualdade}(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

em que  $n$  e  $m \in \mathbb{Z}^+$ .

**Problema mac.6.** Projete uma máquina de Turing para computar a função  $\min(x, y)$ , em que  $x$  e  $y$  são inteiros positivos representados na fita por cadeias de 1 separadas por um 0. Você pode usar símbolos adicionais no alfabeto da máquina.

A função  $\min$  seleciona o menor valor entre seus argumentos, de modo que  $\min(3, 5) = 3$ ,  $\min(20, 16) = 16$ , e  $\min(4, 4) = 4$ , e assim por diante.

**Definição mac.5.** Uma máquina de Turing  $M$  computa a função parcial  $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$  sse,

1.  $M$  para com a entrada  $1^{n_1} \frown 0 \frown \dots \frown 0 \frown 1^{n_k}$  produzindo a saída  $1^m$  se  $f(n_1, \dots, n_k) = m$ .
2.  $M$  não para de modo algum, ou para com uma saída que não é um único bloco de 1 se  $f(n_1, \dots, n_k)$  é indefinida.

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas