

Capítulo udf

O Tamanho dos Conjuntos

Este capítulo discute enumerações e conjuntos contáveis e incontáveis. Várias seções vêm em duas versões: uma mais elementar, que toma enumerações como listas, ou sobrejeções de $\mathbb{Z}^+$; e uma mais abstrata que define enumerações como bijeções com $\mathbb{N}$.

siz.1 Introdução

sfr:siz:int:
sec

Quando Georg Cantor desenvolveu a teoria dos conjuntos na década de 1870, um dos seus objetivos era tornar aceitável a ideia de uma coleção infinita—um infinito *atual*, como diriam os medievais. Parte central disto foi o seu tratamento do *tamanho* de conjuntos diferentes. Se a , b e c são todos distintos, então o conjunto $\{a, b, c\}$ é intuitivamente *maior* que $\{a, b\}$. Mas e os conjuntos infinitos? Serão todos do mesmo tamanho? Acontece que não.

A primeira ideia importante aqui é a de *enumeração*. Podemos listar qualquer conjunto finito enumerando todos os seus **membros**. Para alguns conjuntos infinitos, também podemos listar todos os seus **membros** se permitirmos que a própria lista seja infinita. Tais conjuntos chamam-se **enumeráveis**. O resultado surpreendente de Cantor, que compreenderemos completamente no fim deste capítulo, foi que alguns conjuntos infinitos *não* são **enumeráveis**.

siz.2 Enumerações e Conjuntos Enumeráveis

sfr:siz:enm:
sec

Esta seção discute enumerações de conjuntos, definindo-as como sobrejeções de $\mathbb{Z}^+$. Faz as coisas devagar, para leitores com pouca formação matemática. Uma versão alternativa, mais concisa, é dada na **Seção siz.11**,

que define enumerações de outro modo: como bijeções com $\mathbb{N}$ (ou um segmento inicial).

explanation Já demos exemplos de conjuntos listando seus **membros**. Discutamos agora, de maneira mais geral, como e quando podemos listar os **membros** de um conjunto, mesmo que esse conjunto seja infinito.

Definição siz.1 (Enumeração, informalmente). Informalmente, uma *enumeração* de um conjunto A é uma lista (possivelmente infinita) de **membros** de A tal que todo **membro** de A aparece na lista em alguma posição finita. Se A tem uma enumeração, então diz-se que A é *enumerável*.

explanation Alguns pontos sobre enumerações:

1. Contamos como enumerações apenas listas que têm um começo e em que todo **membro** além do primeiro tem um único **membro** imediatamente anterior. Em outras palavras, há apenas um número finito de elementos entre o primeiro **membro** da lista e qualquer outro **membro**. Em particular, isso significa que todo **membro** de uma enumeração tem uma posição finita: o primeiro **membro** tem posição 1, o segundo posição 2, etc.
2. Podemos ter enumerações diferentes do mesmo conjunto A que diferem pela ordem em que os **membros** aparecem: 4, 1, 25, 16, 9 enumera os (conjunto dos) cinco primeiros quadrados tão bem quanto 1, 4, 9, 16, 25.
3. Enumerações redundantes ainda são enumerações: 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... enumera o mesmo conjunto que 1, 2, 3, ...
4. Ordem e redundância *importam* quando especificamos uma enumeração: podemos enumerar os inteiros positivos começando com 1, 2, 3, 1, ..., mas o padrão é mais fácil de ver quando enumerados da maneira padrão como 1, 2, 3, 4, ...
5. Enumerações devem ter um começo: ..., 3, 2, 1 não é uma enumeração dos inteiros positivos porque não tem primeiro **membro**. Para ver como isso segue da definição informal, pergunte a si mesmo: “em que posição na lista o número 76 aparece?”
6. O seguinte não é uma enumeração dos inteiros positivos: 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ... O problema é que os números pares ocorrem nas posições $\infty + 1$, $\infty + 2$, $\infty + 3$, em vez de em posições finitas.
7. O conjunto vazio é **enumerável**: é enumerado pela lista vazia!

Proposição siz.2. Se A tem uma enumeração, tem uma enumeração sem repetições.

Prova. Suponha que A tem uma enumeração $x_1, x_2, \dots$ em que cada x_i é um **membro** de A . Podemos remover repetições de uma enumeração removendo **membros** repetidos. Por exemplo, podemos transformar a enumeração em uma nova na qual listamos x_i se ele é um **membro** de A que não está entre $x_1, \dots, x_{i-1}$ ou removemos x_i da lista se já aparece entre $x_1, \dots, x_{i-1}$. $\square$

O último argumento mostra que, para obter um bom controle sobre enumerações e conjuntos **enumeráveis** e provar coisas sobre eles, precisamos de uma definição mais precisa. O seguinte a fornece.

Definição siz.3 (Enumeração, formalmente). Uma *enumeração* de um conjunto $A \neq \emptyset$ é qualquer função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

Convençamo-nos de que a definição formal e a definição informal usando uma lista possivelmente infinita são equivalentes. Primeiro, qualquer função **sobrejetiva** de $\mathbb{Z}^+$ para um conjunto A enumera A . Tal função determina uma enumeração conforme definido informalmente acima: a lista $f(1), f(2), f(3), \dots$. Como f é **sobrejetiva**, todo **membro** de A é garantidamente o valor de $f(n)$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo, todo **membro** de A aparece em alguma posição finita na lista. Como a função pode não ser **injetiva**, a lista pode ser redundante, mas isso é aceitável (como observado acima). explanation

Por outro lado, dada uma lista que enumera todos os **membros** de A , podemos definir uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ fazendo $f(n)$ ser o n -ésimo **membro** da lista, ou o último **membro** da lista se não há n -ésimo **membro**. O único caso em que isso não produz uma função **sobrejetiva** é quando A é vazio, e portanto a lista é vazia. Assim, toda lista não vazia determina uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

sfr:siz:enm:
defn:enumerable

Definição siz.4. Um conjunto A é **enumerável** sse é vazio ou tem uma enumeração.

Exemplo siz.5. Uma função que enumera os inteiros positivos ($\mathbb{Z}^+$) é simplesmente a função identidade dada por $f(n) = n$. Uma função que enumera os números naturais $\mathbb{N}$ é a função $g(n) = n - 1$.

Exemplo siz.6. As funções $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ e $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ dadas por

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n \text{ e} \\ g(n) &= 2n - 1 \end{aligned}$$

enumeram os inteiros positivos pares e os inteiros positivos ímpares, respectivamente. Contudo, nenhuma das funções é uma enumeração de $\mathbb{Z}^+$, já que nenhuma é **sobrejetiva**.

Problema siz.1. Defina uma enumeração dos quadrados positivos 1, 4, 9, 16, $\dots$

Exemplo siz.7. A função $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ (onde $\lceil x \rceil$ denota a função *teto*, que arredonda x para cima até o inteiro mais próximo) enumera o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Note como f gera os valores de $\mathbb{Z}$ “saltando” de um lado para outro entre inteiros positivos e negativos:

$$\begin{array}{cccccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & \dots \\ -\lceil \frac{0}{2} \rceil & \lceil \frac{1}{2} \rceil & -\lceil \frac{2}{2} \rceil & \lceil \frac{3}{2} \rceil & -\lceil \frac{4}{2} \rceil & \lceil \frac{5}{2} \rceil & -\lceil \frac{6}{2} \rceil & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \dots \end{array}$$

Você também pode pensar em f como definida por casos da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n-1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar e } > 1 \end{cases}$$

Problema siz.2. Mostre que se A e B são **enumeráveis**, então $A \cup B$ também é. Para isso, suponha que há funções **sobrejetivas** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ e $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow B$, e defina uma função **sobrejetiva** $h: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A \cup B$ e mostre que ela é **sobrejetiva**. Considere também os casos em que A ou $B = \emptyset$.

Problema siz.3. Mostre que se $B \subseteq A$ e A é **enumerável**, então B também é. Para isso, suponha que há uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Defina uma função **sobrejetiva** $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow B$ e mostre que ela é **sobrejetiva**. O que acontece se $B = \emptyset$?

Problema siz.4. Mostre por indução em n que se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todos **enumeráveis**, então $A_1 \cup \dots \cup A_n$ também é. Você pode assumir o fato de que se dois conjuntos A e B são **enumeráveis**, então $A \cup B$ também é.

Embora seja talvez mais natural ao listar os **membros** de um conjunto começar a contar a partir do 1º **membro**, os matemáticos gostam de usar os números naturais $\mathbb{N}$ para contar coisas. Eles falam do 0^o , 1^o , 2^o , e assim por diante, **membro** de uma lista. Correspondentemente, podemos definir uma enumeração como uma função **sobrejetiva** de $\mathbb{N}$ para A . É claro que as duas definições são equivalentes.

Proposição siz.8. Há uma **sobrejeção** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ sse há uma **sobrejeção** $g: \mathbb{N} \rightarrow A$. *sfr:siz:enm: prop:enum-shift*

Prova. Dada uma **sobrejeção** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$, podemos definir $g(n) = f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ é **sobrejetiva**. Reciprocamente, dada uma **sobrejeção** $g: \mathbb{N} \rightarrow A$, defina $f(n) = g(n-1)$. □

Isso nos dá o seguinte resultado:

sfr:siz:enm:
cor:enum-nat

Corolário siz.9. Um conjunto A é *enumerável* sse é vazio ou há uma função *sobrejetiva* $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.

Discutimos acima que uma lista de *membros* de um conjunto A pode ser transformada em uma lista sem repetições. Isso também vale para enumerações, mas é um pouco mais difícil de formular e provar rigorosamente. Qualquer função $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ deve estar definida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se há apenas um número finito de *membros* em A , então claramente não podemos ter uma função definida nos infinitos *membros* de $\mathbb{Z}^+$ que toma como valores todos os *membros* de A mas nunca toma o mesmo valor duas vezes. Nesse caso, isto é, no caso em que a lista sem repetições é finita, devemos escolher um domínio diferente para f , um com apenas um número finito de *membros*. Não ter repetições significa que f deve ser *injetiva*. Como também é *sobrejetiva*, estamos procurando uma *bijeção* entre algum conjunto finito $\{1, \dots, n\}$ ou $\mathbb{Z}^+$ e A .

sfr:siz:enm:
prop:enum-bij

Proposição siz.10. Se $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ é *sobrejetiva* (isto é, uma enumeração de A), há uma *bijeção* $g: Z \rightarrow A$ onde Z é $\mathbb{Z}^+$ ou $\{1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$.

Prova. Definimos a função g recursivamente: seja $g(1) = f(1)$. Se $g(i)$ já foi definido, seja $g(i+1)$ o primeiro valor de $f(1), f(2), \dots$ que ainda não está entre $g(1), \dots, g(i)$, se houver um. Se A tem apenas n *membros*, então $g(1), \dots, g(n)$ estão todos definidos, e assim definimos uma função $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow A$. Se A tem infinitos *membros*, então para qualquer i deve haver um *membro* de A na enumeração $f(1), f(2), \dots$, que ainda não está entre $g(1), \dots, g(i)$. Nesse caso definimos uma função $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

A função g é *sobrejetiva*, já que qualquer elemento de A está entre $f(1), f(2), \dots$ (pois f é *sobrejetiva*) e assim eventualmente será um valor de $g(i)$ para algum i . Também é *injetiva*, já que se houvesse $j < i$ tal que $g(j) = g(i)$, então $g(i)$ já estaria entre $g(1), \dots, g(i-1)$, contrariamente à forma como definimos g . $\square$

sfr:siz:enm:
cor:enum-nat-bij

Corolário siz.11. Um conjunto A é *enumerável* sse é vazio ou há uma *bijeção* $f: N \rightarrow A$ onde $N = \mathbb{N}$ ou $N = \{0, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Prova. A é *enumerável* sse A é vazio ou há uma *sobrejetiva* $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Pela **Proposição siz.10**, o último vale sse há uma função *bijetiva* $f: Z \rightarrow A$ onde $Z = \mathbb{Z}^+$ ou $Z = \{1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Pelo mesmo argumento da prova da **Proposição siz.8**, isso por sua vez é o caso sse há uma *bijeção* $g: N \rightarrow A$ onde $N = \mathbb{N}$ ou $N = \{0, \dots, n-1\}$. $\square$

Problema siz.5. De acordo com a **Definição siz.4**, um conjunto A é *enumerável* sse $A = \emptyset$ ou há uma *sobrejetiva* $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Também é possível definir “conjunto *enumerável*” precisamente por: um conjunto é *enumerável* sse há uma função *injetiva* $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Mostre que as definições são equivalentes, isto é, mostre que há uma função *injetiva* $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sse $A = \emptyset$ ou há uma *sobrejetiva* $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

siz.3 Método do Zigue-Zague de Cantor

explanation Já consideramos algumas enumerações “fáceis”. Vejamos algo um pouco mais difícil. Considere-se o conjunto dos pares de números naturais definido por: sfr:siz:zigzag:sec

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle n, m \rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$$

Podemos organizar estes pares ordenados numa *matriz*, assim:

	0	1	2	3	...
0	$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	...
1	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 3 \rangle$	...
2	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 2, 3 \rangle$	...
3	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 3, 1 \rangle$	$\langle 3, 2 \rangle$	$\langle 3, 3 \rangle$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Claramente, cada par ordenado em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aparece exatamente uma vez na matriz. Em particular, $\langle n, m \rangle$ aparece na n -ésima linha e na m -ésima coluna. Mas como organizar os elementos de tal matriz numa lista “unidimensional”? O padrão na matriz abaixo demonstra uma forma de o fazer (embora haja, claro, muitas outras):

	0	1	2	3	4	...
0	0	1	3	6	10	...
1	2	4	7	11	...	...
2	5	8	12	...	...	...
3	9	13	...	...	...	...
4	14	...	...	...	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\ddots$

Este padrão chama-se *método do zigue-zague de Cantor*. Enumera $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do seguinte modo:

$$\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 0, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \dots$$

Isto estabelece o seguinte:

Proposição siz.12. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é *enumerável*.

sfr:siz:zigzag:natsquaredenumerable

Prova. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a função que a cada $k \in \mathbb{N}$ associa o tuplo $\langle n, m \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que k é o valor na n -ésima linha e m -ésima coluna da matriz do zigue-zague de Cantor. $\square$

explanation Esta técnica generaliza-se bem. Por exemplo, podemos usá-la para enumerar o conjunto dos triplos ordenados de números naturais, isto é:

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{\langle n, m, k \rangle : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

Pensamos em $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como o produto cartesiano de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com $\mathbb{N}$, isto é,

$$\mathbb{N}^3 = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} = \{\langle \langle n, m \rangle, k \rangle : n, m, k \in \mathbb{N}\}$$

e assim podemos enumerar $\mathbb{N}^3$ com uma matriz rotulando um eixo com a enumeração de $\mathbb{N}$ e o outro com a enumeração de $\mathbb{N}^2$:

	0	1	2	3	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 0, 3 \rangle$	...
$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 1, 2 \rangle$	$\langle 0, 1, 3 \rangle$	...
$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 0, 1 \rangle$	$\langle 1, 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 0, 3 \rangle$	...
$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 2, 0 \rangle$	$\langle 0, 2, 1 \rangle$	$\langle 0, 2, 2 \rangle$	$\langle 0, 2, 3 \rangle$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Assim, com um método como o zigue-zague de Cantor, obtemos analogamente uma enumeração de $\mathbb{N}^3$. E podemos continuar, obtendo enumerações de $\mathbb{N}^n$ para qualquer número natural n . Logo:

Proposição siz.13. $\mathbb{N}^n$ é *enumerável*, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema siz.6. Mostre que $(\mathbb{Z}^+)^n$ é *enumerável*, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema siz.7. Mostre que $(\mathbb{Z}^+)^*$ é *enumerável*. Pode assumir **Problema siz.6**.

siz.4 Funções de Pareamento e Códigos

sfr:siz:pai:
sec

O método do zigue-zague de Cantor torna visualmente evidente a enumerabilidade de $\mathbb{N}^n$. Mas vamos concentrar-nos na nossa matriz que representa $\mathbb{N}^2$. Seguindo a linha em zigue-zague na matriz e contando as posições, podemos verificar que $\langle 1, 2 \rangle$ fica associado ao número 7. Seria útil, contudo, poder calcular isto de modo mais direto. Ou seja, seria útil dispor da *inversa* da enumeração em zigue-zague, $g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, tal que

explanation

$$g(\langle 0, 0 \rangle) = 0, \quad g(\langle 0, 1 \rangle) = 1, \quad g(\langle 1, 0 \rangle) = 2, \quad \dots, \quad g(\langle 1, 2 \rangle) = 7, \quad \dots$$

Isto permitir-nos-ia calcular exatamente em que posição da enumeração cai $\langle n, m \rangle$.

De fato, podemos definir g diretamente com base em duas observações. Primeiro: se a n -ésima linha e a m -ésima coluna contêm o valor v , então a $(n+1)$ -ésima linha e a $(m-1)$ -ésima coluna contêm o valor $v+1$. Segundo: a primeira linha da nossa enumeração consiste nos números triangulares, começando por 0, 1, 3, 6, etc. O k -ésimo número triangular é a soma dos números naturais $< k$, que se pode calcular como $k(k+1)/2$. Juntando estas duas observações, consideremos a função:

$$g(n, m) = \frac{(n+m+1)(n+m)}{2} + n$$

Escreve-se frequentemente $g(n, m)$ em vez de $g(\langle n, m \rangle)$, já que é mais fácil para os olhos. Isto diz-nos que se determine primeiro o $(n + m)$ -ésimo número triangular e depois que lhe somemos n . A função preenche a matriz exatamente da maneira que desejamos. Em particular, o par $\langle 1, 2 \rangle$ é enviado para $\frac{4 \times 3}{2} + 1 = 7$.

Esta função g é a *inversa* de uma enumeração de um conjunto de pares. Tais funções chamam-se *funções de emparelhamento*.

Definição siz.14 (Função de emparelhamento). Uma função $f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ é uma *função de emparelhamento* aritmética se f for injetiva. Dizemos também que f *codifica* $A \times B$, e que $f(x, y)$ é o *código* de $\langle x, y \rangle$.

explanation

Podemos usar funções de emparelhamento para codificar, por exemplo, pares de números naturais; ou, em outras palavras, podemos representar cada *par* de elementos por um *único* número. Usando a inversa da função de emparelhamento, podemos *descodificar* o número, isto é, determinar que par representa.

Problema siz.8. Dê uma enumeração do conjunto de todos os números racionais não negativos.

Problema siz.9. Mostre que $\mathbb{Q}$ é **enumerável**. Recordemos que qualquer número racional se pode escrever como uma fração z/m com $z \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^+$.

Problema siz.10. Defina uma enumeração de $\mathbb{B}^*$.

Problema siz.11. Recordando o curso introdutório de lógica, cada tabela de verdade possível exprime uma função de verdade. Em outras palavras, as funções de verdade são todas as funções de $\mathbb{B}^k \rightarrow \mathbb{B}$ para algum k . Prove que o conjunto de todas as funções de verdade é **enumerável**.

Problema siz.12. Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos finitos de um conjunto infinito **enumerável** arbitrário é **enumerável**.

Problema siz.13. Um subconjunto de $\mathbb{N}$ diz-se *confinito* sse for o complemento de um conjunto finito; isto é, $A \subseteq \mathbb{N}$ é confinito sse $\mathbb{N} \setminus A$ for finito. Seja I o conjunto cujos **membros** são exatamente os subconjuntos finitos e confinitos de $\mathbb{N}$. Mostre que I é **enumerável**.

Problema siz.14. Mostre que a união **enumerável** de conjuntos **enumeráveis** é **enumerável**. Isto é, sempre que $A_1, A_2, \dots$ são conjuntos e cada A_i é **enumerável**, então a união $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ de todos eles também é **enumerável**. [Nota: isto é difícil!]

Problema siz.15. Seja $f: A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ uma função de emparelhamento arbitrária. Mostre que a inversa de f é uma enumeração de $A \times B$.

Problema siz.16. Especifique uma função que codifique $\mathbb{N}^3$.

siz.5 Uma Função de Emparelhamento Alternativa

sfr:siz:pai-alt:
sec

Há outras enumerações de $\mathbb{N}^2$ que facilitam descobrir quais são suas inversas. [explanation](#)
Eis uma. Em vez de visualizar a enumeração em uma matriz, comece com a lista de inteiros positivos associados a espaços (inicialmente) vazios. Imagine preencher esses espaços sucessivamente com pares $\langle n, m \rangle$ da seguinte forma. Começando com os pares que têm 0 na primeira posição (isto é, pares $\langle 0, m \rangle$), coloque o primeiro (isto é, $\langle 0, 0 \rangle$) no primeiro espaço vazio, depois pule um espaço vazio, coloque o segundo (isto é, $\langle 0, 2 \rangle$) no próximo espaço vazio, pule outro, e assim por diante. O começo (incompleto) de nossa enumeração agora se parece com isto

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\dots$					

Repita isso com pares $\langle 1, m \rangle$ nos lugares que ainda permanecem vazios, novamente pulando cada outro espaço vazio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\dots$		

Insira pares $\langle 2, m \rangle$, $\langle 2, m \rangle$, etc., da mesma forma. Nossa enumeração completa assim começa assim:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	$\dots$

Se numerarmos as células na matriz acima de acordo com essa enumeração, não encontraremos uma linha zigue-zague arrumada, mas este arranjo:

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	3	5	7	9	11	...
1	2	6	10	14	18	...	...
2	4	12	20	28	...	...	...
3	8	24	40	...	...	...	...
4	16	48	...	...	...	...	...
5	32	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Podemos ver que os pares na linha 0 estão nas posições ímpares de nossa enumeração, isto é, o par $\langle 0, m \rangle$ está na posição $2m + 1$; os pares na segunda linha, $\langle 1, m \rangle$, estão em posições cujo número é o dobro de um número ímpar, especificamente, $2 \cdot (2m + 1)$; os pares na terceira linha, $\langle 2, m \rangle$, estão em posições cujo número é quatro vezes um número ímpar, $4 \cdot (2m + 1)$; e assim por diante. Os fatores de $(2m + 1)$ para cada linha, 1, 2, 4, 8, ..., são exatamente as potências de 2: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, ... De fato, o expoente

relevante é sempre o primeiro membro do par em questão. Assim, para o par $\langle n, m \rangle$ o fator é 2^n . Isso nos dá a fórmula geral: $2^n \cdot (2m + 1)$. Contudo, isso é um mapeamento de pares para inteiros *positivos*, isto é, $\langle 0, 0 \rangle$ tem posição 1. Se quisermos começar na posição 0 devemos subtrair 1 do resultado. Isso nos dá:

Exemplo siz.15. A função $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$h(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

é uma função de emparelhamento para o conjunto de pares de números naturais $\mathbb{N}^2$.

explanation

De acordo com nossa segunda enumeração de $\mathbb{N}^2$, o par $\langle 0, 0 \rangle$ tem código $h(0, 0) = 2^0(2 \cdot 0 + 1) - 1 = 0$; $\langle 1, 2 \rangle$ tem código $2^1 \cdot (2 \cdot 2 + 1) - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $\langle 2, 6 \rangle$ tem código $2^2 \cdot (2 \cdot 6 + 1) - 1 = 51$.

Às vezes basta codificar pares de números naturais $\mathbb{N}^2$ sem exigir que a codificação seja sobrejetora. Tais codificações têm inversas que são apenas funções parciais.

Exemplo siz.16. A função $j: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^+$ dada por

$$j(n, m) = 2^n 3^m$$

é uma função *injetiva* $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

siz.6 Conjuntos Não enumeráveis

sfr:siz:nen:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade de $\mathbb{B}^\omega$ e $\wp(\mathbb{Z}^+)$ usando a definição na [Seção siz.2](#). Foi concebida para ser um pouco mais elementar e um pouco mais detalhada que a versão na [Seção siz.11](#)

Alguns conjuntos, como o conjunto $\mathbb{Z}^+$ dos inteiros positivos, são infinitos. Até agora vimos exemplos de conjuntos infinitos que eram todos *enumerável*. Contudo, há também conjuntos infinitos que não têm essa propriedade. Tais conjuntos são chamados de *não enumerável*.

Em primeiro lugar, talvez já seja surpreendente que existam conjuntos *não enumerável*. Para qualquer conjunto *enumerável* A há uma função *sobrejetiva* $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Se um conjunto é *não enumerável*, não há tal função. Isto é, nenhuma função mapeando os infinitos *membros* de $\mathbb{Z}^+$ para A pode esgotar todo A . Assim, há “mais” *membros* em A do que os infinitos inteiros positivos.

Como se provaria que um conjunto é *não enumerável*? É preciso mostrar que nenhuma tal função sobrejetora pode existir. Equivalentemente, é preciso mostrar que os elementos de A não podem ser enumerados em uma lista infinita

unidirecional. A melhor maneira de fazer isso é mostrar que toda lista de **membros** de A deve deixar de fora pelo menos um elemento; ou que nenhuma função $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ pode ser **sobrejetiva**. Podemos fazer isso usando o *método diagonal* de Cantor. Dada uma lista de **membros** de A , digamos, $x_1, x_2, \dots$, construímos outro elemento de A que, por sua construção, não pode estar naquela lista.

Nosso primeiro exemplo é o conjunto $\mathbb{B}^\omega$ de todas as seqüências infinitas, sem lacunas, de 0s e 1s.

*sfr:siz:nen:
thm:nonenum-bin-omega*

Teorema siz.17. $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável**.

Prova. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{B}^\omega$ é **enumerável**, isto é, suponha que há uma lista $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ de todos os **membros** de $\mathbb{B}^\omega$. Cada um desses s_i é em si uma seqüência infinita de 0s e 1s. Chamemos o j -ésimo elemento da i -ésima seqüência nessa lista de $s_i(j)$. Então a i -ésima seqüência s_i é

$$s_i(1), s_i(2), s_i(3), \dots$$

Podemos organizar essa lista, e os elementos de cada seqüência s_i nela, em uma matriz:

	1	2	3	4	...
1	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$	...
2	$s_2(1)$	$s_2(2)$	$s_2(3)$	$s_2(4)$	...
3	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$s_3(3)$	$s_3(4)$	...
4	$s_4(1)$	$s_4(2)$	$s_4(3)$	$s_4(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Os rótulos ao lado indicam o número da seqüência na lista $s_1, s_2, \dots$; os números no topo rotulam os **membros** das seqüências individuais. Por exemplo, $s_1(1)$ é um nome para qualquer número, um 0 ou um 1, que é o primeiro **membro** na seqüência s_1 , e assim por diante.

Agora construímos uma seqüência infinita, $\bar{s}$, de 0s e 1s que não pode estar nessa lista. A definição de $\bar{s}$ dependerá da lista $s_1, s_2, \dots$. Qualquer lista infinita de seqüências infinitas de 0s e 1s dá origem a uma seqüência infinita $\bar{s}$ que está garantidamente fora da lista.

Para definir $\bar{s}$, especificamos todos os seus **membros**, isto é, especificamos $\bar{s}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Fazemos isso lendo a diagonal da matriz acima (daí o nome “método diagonal”) e depois trocando cada 1 por 0 e cada 0 por 1. De maneira mais abstrata, definimos $\bar{s}(n)$ como 0 ou 1 conforme o n -ésimo **membro** da diagonal, $s_n(n)$, é 1 ou 0.

$$\bar{s}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_n(n) = 0 \\ 0 & \text{se } s_n(n) = 1. \end{cases}$$

Se você prefere fórmulas a definições por casos, também pode definir $\bar{s}(n) = 1 - s_n(n)$.

Claramente $\bar{s}$ é uma sequência infinita de 0s e 1s, já que é apenas a sequência espelhada da sequência de 0s e 1s que aparecem na diagonal de nossa matriz. Assim $\bar{s}$ é um membro de $\mathbb{B}^\omega$. Mas não pode estar na lista $s_1, s_2, \dots$. Por quê?

Não pode ser a primeira sequência na lista, s_1 , porque difere de s_1 no primeiro membro. Seja qual for $s_1(1)$, definimos $\bar{s}(1)$ como o oposto. Não pode ser a segunda sequência na lista, porque $\bar{s}$ difere de s_2 no segundo elemento: se $s_2(2)$ é 0, $\bar{s}(2)$ é 1, e vice-versa. E assim por diante.

Mais precisamente: se $\bar{s}$ estivesse na lista, haveria algum k tal que $\bar{s} = s_k$. Duas sequências são idênticas sse concordam em toda posição, isto é, para qualquer n , $\bar{s}(n) = s_k(n)$. Em particular, tomando $n = k$ como caso especial, $\bar{s}(k) = s_k(k)$ teria de valer. $s_k(k)$ é 0 ou 1. Se é 0, então $\bar{s}(k)$ deve ser 1—é assim que definimos $\bar{s}$. Mas se $s_k(k) = 1$, de novo por causa da forma como definimos $\bar{s}$, $\bar{s}(k) = 0$. Em ambos os casos $\bar{s}(k) \neq s_k(k)$.

Começamos supondo que há uma lista de membros de $\mathbb{B}^\omega$, $s_1, s_2, \dots$. A partir dessa lista construímos uma sequência $\bar{s}$ que provamos não poder estar na lista. Mas ela definitivamente é uma sequência de 0s e 1s se todos os s_i são sequências de 0s e 1s, isto é, $\bar{s} \in \mathbb{B}^\omega$. Isso mostra em particular que não pode haver lista de todos os membros de $\mathbb{B}^\omega$, já que para qualquer tal lista também poderíamos construir uma sequência $\bar{s}$ garantidamente fora da lista, de modo que a suposição de que há uma lista de todas as sequências em $\mathbb{B}^\omega$ leva a uma contradição. $\square$

explanation

Esse método de prova é chamado de “diagonalização” porque usa a diagonal da matriz para definir $\bar{s}$. A diagonalização não precisa envolver a presença de uma matriz: podemos mostrar que conjuntos não são enumerável usando uma ideia semelhante mesmo quando não há matriz nem diagonal propriamente dita.

Teorema siz.18. $\wp(\mathbb{Z}^+)$ não é enumerável.

sfr:siz:nen:
thm:nonenum-pownat

Prova. Procedemos da mesma forma, mostrando que para toda lista de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$ há um subconjunto de $\mathbb{Z}^+$ que não pode estar na lista. Suponha que a seguinte é uma lista dada de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$:

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

Agora definimos um conjunto $\bar{Z}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \bar{Z}$ sse $n \notin Z_n$:

$$\bar{Z} = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \notin Z_n\}$$

$\square$

$\bar{Z}$ é claramente um conjunto de inteiros positivos, já que por suposição cada Z_n o é, e assim $\bar{Z} \in \wp(\mathbb{Z}^+)$. Mas $\bar{Z}$ não pode estar na lista. Para mostrar isso, estabeleceremos que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $\bar{Z} \neq Z_k$.

Seja $k \in \mathbb{Z}^+$ arbitrário. Definimos $\bar{Z}$ de modo que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \bar{Z}$ sse $n \notin Z_n$. Em particular, tomando $n = k$, $k \in \bar{Z}$ sse $k \notin Z_k$. Mas isso mostra que $\bar{Z} \neq Z_k$, já que k é um membro de um mas não do outro, e assim $\bar{Z}$ e Z_k têm membros diferentes. Como k foi arbitrário, $\bar{Z}$ não está na lista $Z_1, Z_2, \dots$

A prova precedente não mencionou uma diagonal, mas você pode pensar nela como envolvendo uma diagonal se a imaginar assim: imagine os conjuntos $Z_1, Z_2, \dots$, escritos em uma matriz, onde cada **membro** $j \in Z_i$ é listado na j -ésima coluna. Digamos que os primeiros quatro conjuntos nessa lista são $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{2, 4, 6, \dots\}$, $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5, \dots\}$. Então a matriz começaria com

$$\begin{array}{cccccccc} Z_1 = \{ & \mathbf{1}, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \} \\ Z_2 = \{ & & \mathbf{2}, & & 4, & & 6, & \dots \} \\ Z_3 = \{ & 1, & 2, & & & 5, & & \} \\ Z_4 = \{ & & & 3, & \mathbf{4}, & 5, & 6, & \dots \} \\ & \vdots & & & & \ddots & & \end{array}$$

Então $\overline{Z}$ é o conjunto obtido percorrendo a diagonal, deixando de fora quaisquer números que aparecem ao longo da diagonal e incluindo aqueles j onde a matriz tem uma lacuna na j -ésima linha/coluna. No caso acima, deixaríamos de fora 1 e 2, incluiríamos 3, deixaríamos de fora 4, etc.

Problema siz.17. Mostre que $\wp(\mathbb{N})$ é **não enumerável** por um argumento diagonal.

Problema siz.18. Mostre que o conjunto de funções $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ é **não enumerável** por um argumento diagonal explícito. Isto é, mostre que se $f_1, f_2, \dots$, é uma lista de funções e cada $f_i: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, então há alguma $\bar{f}: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fora dessa lista.

siz.7 Redução

sfr:siz:red:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade por redução, correspondendo aos resultados na **Seção siz.6**. Uma versão alternativa, ligeiramente mais condensada, correspondente aos resultados na **Seção siz.12**, é fornecida na **Seção siz.13**.

Mostramos $\wp(\mathbb{Z}^+)$ como **não enumerável** por um argumento de diagonalização. Já tínhamos uma prova de que $\mathbb{B}^\omega$, o conjunto de todas as sequências infinitas de 0s e 1s, é **não enumerável**. Eis outra maneira de provar que $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **não enumerável**: mostre que se $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **enumerável**, então $\mathbb{B}^\omega$ também é **enumerável**. Como sabemos que $\mathbb{B}^\omega$ não é **enumerável**, $\wp(\mathbb{Z}^+)$ também não pode ser. Isso é chamado de *reduzir* um problema a outro—neste caso, reduzimos o problema de enumerar $\mathbb{B}^\omega$ ao problema de enumerar $\wp(\mathbb{Z}^+)$. Uma solução para o último—uma enumeração de $\wp(\mathbb{Z}^+)$ —daria uma solução para o primeiro—uma enumeração de $\mathbb{B}^\omega$.

Como reduzimos o problema de enumerar um conjunto B ao de enumerar um conjunto A ? Fornecemos uma maneira de transformar uma enumeração

de A em uma enumeração de B . A maneira mais fácil de fazer isso é definir uma função **sobrejetiva** $f: A \rightarrow B$. Se $x_1, x_2, \dots$ enumera A , então $f(x_1), f(x_2), \dots$ enumeraria B . Em nosso caso, procuramos uma função sobrejetora $f: \wp(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$.

Problema siz.19. Mostre que se há uma função **injetiva** $g: B \rightarrow A$, e B é **não enumerável**, então A também é. Faça isso mostrando como você pode usar g para transformar uma enumeração de A em uma de B .

Prova do Teorema siz.18 por redução. Suponha que $\wp(\mathbb{Z}^+)$ fosse **enumerável**, e portanto que há uma enumeração dele, $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$

Defina a função $f: \wp(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$ fazendo $f(Z)$ ser a sequência s_k tal que $s_k(n) = 1$ sse $n \in Z$, e $s_k(n) = 0$ caso contrário. Isso define claramente uma função, já que sempre que $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$, qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$ ou é **um membro** de Z ou não é. Por exemplo, o conjunto $2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, 6, \dots\}$ dos pares positivos é mapeado para a sequência $010101\dots$, o conjunto vazio é mapeado para $0000\dots$ e o conjunto $\mathbb{Z}^+$ para $1111\dots$.

Também é **sobrejetiva**: toda sequência de 0s e 1s corresponde a algum conjunto de inteiros positivos, nomeadamente aquele que tem como membros os inteiros correspondentes às posições onde a sequência tem 1s. Mais precisamente, suponha $s \in \mathbb{B}^\omega$. Defina $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$ por:

$$Z = \{n \in \mathbb{Z}^+ : s(n) = 1\}$$

Então $f(Z) = s$, como pode ser verificado consultando a definição de f .

Agora considere a lista

$$f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3), \dots$$

Como f é **sobrejetiva**, todo membro de $\mathbb{B}^\omega$ deve aparecer como valor de f para algum argumento, e assim deve aparecer na lista. Essa lista portanto deve enumerar todo $\mathbb{B}^\omega$.

Assim, se $\wp(\mathbb{Z}^+)$ fosse **enumerável**, $\mathbb{B}^\omega$ seria **enumerável**. Mas $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável** (Teorema siz.17). Logo $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **não enumerável**. $\square$

explanation É fácil confundir a direção em que a redução vai. Por exemplo, uma função **sobrejetiva** $g: \mathbb{B}^\omega \rightarrow B$ **não** estabelece que B é **não enumerável**. (Considere $g: \mathbb{B}^\omega \rightarrow \mathbb{B}$ definida por $g(s) = s(1)$, a função que mapeia uma sequência de 0s e 1s para seu primeiro **membro**. Ela é **sobrejetiva**, porque algumas sequências começam com 0 e outras começam com 1. Mas $\mathbb{B}$ é finito.) Note também que a função f deve ser **sobrejetiva**, caso contrário o argumento não se sustenta: $f(x_1), f(x_2), \dots$ não estariam garantidos de incluir todos os **membros** de B . Por exemplo,

$$h(n) = \underbrace{000\dots 0}_{n \text{ 0s}}$$

define uma função $h: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{B}^\omega$, mas $\mathbb{Z}^+$ é **enumerável**.

Problema siz.20. Mostre que o conjunto de todos os *conjuntos de* pares de inteiros positivos é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.21. Mostre que o conjunto X de todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é **não enumerável** por um argumento de redução (Dica: dê uma função sobrejetora de X para $\mathbb{B}^\omega$.)

Problema siz.22. Mostre que $\mathbb{N}^\omega$, o conjunto de sequências infinitas de números naturais, é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.23. Seja P o conjunto de funções do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0\}$, e seja Q o conjunto de funções *parciais* do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0\}$. Mostre que P é **enumerável** e Q não é. (Dica: reduza o problema de enumerar $\mathbb{B}^\omega$ a enumerar Q).

Problema siz.24. Seja S o conjunto de todas as funções **sobrejetivas** do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0,1\}$, isto é, S consiste de todas as **sobrejetivas** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{B}$. Mostre que S é **não enumerável**.

Problema siz.25. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é **não enumerável**.

siz.8 Equinumerosidade

sfr:siz:equ:
sec

Temos uma noção intuitiva do “tamanho” dos conjuntos, que funciona bem para conjuntos finitos. E quanto aos infinitos? Se quisermos uma forma formal de comparar os tamanhos de dois conjuntos de *qualquer* cardinalidade, é boa ideia começar por definir quando dois conjuntos têm o mesmo tamanho. Eis Frege:

Se um garçom quer ter certeza de que pôs exatamente tantas facas quantos pratos sobre a mesa, não precisa contar nem uns nem outros, se simplesmente puser uma faca à direita de cada prato, de modo que cada faca na mesa fique à direita de algum prato. Os pratos e as facas ficam assim correlacionados de modo único, e de fato por essa mesma relação espacial. (Frege, 1884, § 70)

A intuição central desta passagem traduz-se numa definição formal:

sfr:siz:equ:
comparisondef

Definição siz.19. A é *equinumeroso* a B , escrevendo-se $A \approx B$, sse existir uma **bijeção** $f: A \rightarrow B$.

sfr:siz:equ:
equinumerosityisequi

Proposição siz.20. A *relação de equinumerosidade* é uma *relação de equivalência*.

Prova. É preciso mostrar que a equinumerosidade é reflexiva, simétrica e transitiva. Sejam A, B e C conjuntos.

Reflexividade. A aplicação identidade $\text{Id}_A: A \rightarrow A$, com $\text{Id}_A(x) = x$ para todo $x \in A$, é uma bijeção. Logo $A \approx A$.

Simetria. Suponhamos $A \approx B$, isto é, que existe uma bijeção $f: A \rightarrow B$. Como f é bijetiva, a inversa f^{-1} existe e também é bijetiva. Logo $f^{-1}: B \rightarrow A$ é uma bijeção, pelo que $B \approx A$.

Transitividade. Suponhamos $A \approx B$ e $B \approx C$, isto é, que existem bijeções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. Então a composição $g \circ f: A \rightarrow C$ é bijetiva, logo $A \approx C$. $\square$

Proposição siz.21. Se $A \approx B$, então A é enumerável se e só se B o é.

A prova seguinte usa Definição siz.4 se Seção siz.2 estiver incluída e Definição siz.27 caso contrário.

Prova. Suponhamos $A \approx B$, logo existe alguma bijeção $f: A \rightarrow B$, e suponhamos que A é enumerável. Então ou $A = \emptyset$ ou existe uma função sobrejetiva $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Se $A = \emptyset$, então $B = \emptyset$ também (caso contrário existiria um membro $y \in B$ sem $x \in A$ com $g(x) = y$). Se, por outro lado, $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ for sobrejetiva, então $f \circ g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow B$ é sobrejetiva. De fato, seja $y \in B$. Como f é sobrejetiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como g é sobrejetiva, existe $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $g(n) = x$. Logo,

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(x) = y$$

e portanto $f \circ g$ é sobrejetiva. Temos que $f \circ g$ é uma enumeração de B , logo B é enumerável.

Se B é enumerável, obtemos que A é enumerável repetindo o argumento com a bijeção $f^{-1}: B \rightarrow A$ em lugar de f . $\square$

Problema siz.26. Mostre que, se $A \approx C$ e $B \approx D$, e $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, então $A \cup B \approx C \cup D$.

Problema siz.27. Mostre que, se A é infinito e enumerável, então $A \approx \mathbb{N}$.

siz.9 Conjuntos de Tamanhos Diferentes e o Teorema de Cantor

explanation Apresentamos uma formulação precisa da ideia de que dois conjuntos têm o mesmo tamanho. Também podemos precisar a ideia de que um conjunto é menor que outro. A nossa definição de “é menor do que (ou equinumeroso)” exigirá, em vez de uma bijeção entre os conjuntos, uma injeção do primeiro para o segundo. Se tal função existir, o tamanho do primeiro conjunto é menor sfr:siz:car:sec

ou igual ao do segundo. Intuitivamente, uma **injeção** de um conjunto em outro garante que a imagem da função tem pelo menos tantos **membros** quanto o domínio, pois não há dois **membros** do domínio que vão parar ao mesmo **membro** da imagem.

Definição siz.22. *A não é maior do que B*, escrevendo-se $A \preceq B$, sse existir uma **injeção** $f: A \rightarrow B$.

É claro que isto é uma relação reflexiva e transitiva, mas não simétrica (fica como exercício). Podemos ainda introduzir uma noção que diz que um conjunto é (estritamente) menor que outro.

Definição siz.23. *A é menor do que B*, escrevendo-se $A \prec B$, sse existir uma **injeção** $f: A \rightarrow B$ mas não existir **bijecção** $g: A \rightarrow B$, isto é, $A \preceq B$ e $A \not\approx B$.

É claro que esta relação é irreflexiva e transitiva. (Também fica como exercício.) Com esta notação, um conjunto A é **enumerável** sse $A \preceq \mathbb{N}$, e A é **não enumerável** sse $\mathbb{N} \prec A$. Isto permite reformular o **Teorema siz.32** como a observação de que $\mathbb{N} \prec \wp(\mathbb{N})$. De fato, **Cantor (1892)** provou que este último ponto é *completamente geral*:

sfr:siz:car:
thm:cantor

Teorema siz.24 (Cantor). $A \prec \wp(A)$, para qualquer conjunto A .

Prova. A aplicação $f(x) = \{x\}$ é uma **injeção** $f: A \rightarrow \wp(A)$, pois se $x \neq y$, então também $\{x\} \neq \{y\}$ por extensionalidade, logo $f(x) \neq f(y)$. Temos pois $A \preceq \wp(A)$.

Apresentamos a prova longa se **Seção siz.6** estiver presente; caso contrário, uma prova mais curta alinhada com a **Seção siz.12**.

Mostraremos agora que não pode existir função **sobrejetiva** $g: A \rightarrow \wp(A)$, quanto mais **bijetiva**, e portanto que $A \not\approx \wp(A)$. Suponhamos que $g: A \rightarrow \wp(A)$. Como g é total, todo $x \in A$ é mapeado para um subconjunto $g(x) \subseteq A$. Podemos mostrar que g não pode ser sobrejetora. Para isso, definimos um subconjunto $\bar{A} \subseteq A$ que, por definição, não pode estar no contradomínio de g . Seja

$$\bar{A} = \{x \in A : x \notin g(x)\}.$$

Como $g(x)$ está definido para todo $x \in A$, $\bar{A}$ é claramente um subconjunto bem definido de A . Mas não pode estar no contradomínio de g . Seja $x \in A$ arbitrário; mostramos que $\bar{A} \neq g(x)$. Se $x \in g(x)$, então não satisfaz $x \notin g(x)$, logo, pela definição de $\bar{A}$, temos $x \notin \bar{A}$. Se $x \in \bar{A}$, tem de satisfazer a propriedade definidora de $\bar{A}$, isto é, $x \in A$ e $x \notin g(x)$. Como x era arbitrário, isto mostra que, para cada $x \in A$, $x \in g(x)$ sse $x \notin \bar{A}$, logo $g(x) \neq \bar{A}$. Em outras palavras, $\bar{A}$ não pode estar no contradomínio de g , o que contradiz a suposição de que g é sobrejetora. $\square$

explanation É instrutivo comparar a prova do Teorema siz.24 com a do Teorema siz.18. Ali mostramos que, para qualquer lista $Z_1, Z_2, \dots$, de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$, se pode construir um conjunto $\bar{Z}$ de números garantidamente fora da lista. Estava garantido que não estava na lista porque, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \in Z_n$ sse $n \notin \bar{Z}$. Assim, há sempre algum número que é um membro de um entre Z_n ou $\bar{Z}$ mas não do outro. Seguimos a mesma ideia aqui, exceto que os índices n são agora membros de A em vez de $\mathbb{Z}^+$. O conjunto $\bar{A}$ está definido de modo a diferir de $g(x)$ para cada $x \in A$, porque $x \in g(x)$ sse $x \notin \bar{A}$. De novo, há sempre um membro de A que é um membro de um entre $g(x)$ e $\bar{A}$ mas não do outro. E tal como $\bar{Z}$ portanto não pode estar na lista $Z_1, Z_2, \dots$, $\bar{A}$ não pode estar no contradomínio de g .

É instrutivo comparar a prova do Teorema siz.24 com a do Teorema siz.32. Ali mostramos que, para qualquer lista $N_0, N_1, N_2, \dots$, de subconjuntos de $\mathbb{N}$, podemos construir um conjunto D de números garantidamente fora da lista. Estava garantido que não estava na lista porque $n \in N_n$ sse $n \notin D$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seguimos a mesma ideia aqui, exceto que os índices n são agora membros de A em vez de $\mathbb{N}$. O conjunto D está definido de modo a diferir de $g(x)$ para cada $x \in A$, porque $x \in g(x)$ sse $x \notin D$.

A prova vale também a pena comparar com a do Paradoxo de Russell, ???. De fato, o Teorema de Cantor foi a inspiração para o paradoxo de Russell.

Problema siz.28. Mostre que não pode existir uma injeção $g: \wp(A) \rightarrow A$, para qualquer conjunto A . Sugestão: suponha $g: \wp(A) \rightarrow A$ injetiva. Considere $D = \{g(B) : B \subseteq A \text{ e } g(B) \notin B\}$. Seja $x = g(D)$. Use o fato de g ser injetiva para obter uma contradição.

siz.10 A Noção de Tamanho e Schröder-Bernstein

explanation Eis um pensamento intuitivo: se A não é maior do que B e B não é maior do que A , então A e B são equinumerosos. Sejam honestos: se isto estivesse errado, dificilmente poderíamos justificar que a noção definida de equinumerosidade tem a ver com comparações de “tamanhos” entre conjuntos. Felizmente, o pensamento intuitivo está certo. Isto justifica-se pelo Teorema de Schröder-Bernstein.

Teorema siz.25 (Schröder-Bernstein). Se $A \preceq B$ e $B \preceq A$, então $A \approx B$.

sfr:siz:sb:
thm:schroder-bernstein

explanation Em outras palavras, se existir uma injeção de A para B e uma injeção de B para A , então existe uma bijeção de A para B .

Este resultado é, contudo, realmente bastante difícil de provar. De fato, embora Cantor o tivesse enunciado, outros provaram-no.¹ Por agora, pode (e deve) aceitá-lo como verdadeiro.

Felizmente, Schröder-Bernstein é correto e legítima pensarmos nas relações que definimos, isto é, $A \approx B$ e $A \preceq B$, como tendo a ver com “tamanho”. Além disso, Schröder-Bernstein é muito útil. Pode ser difícil imaginar uma bijeção

¹Para mais sobre a história, ver por exemplo Potter (2004, pp. 165–6).

entre dois conjuntos equinumerosos. O Teorema de Schröder-Bernstein permite decompor a comparação em casos em que só precisamos de uma injeção do primeiro para o segundo e vice-versa.

As seções [Seção siz.11](#), [Seção siz.12](#), [Seção siz.13](#) são versões alternativas da [Seção siz.2](#), [Seção siz.6](#), [Seção siz.7](#) de Tim Button para uso em seu texto Open Set Theory. São um pouco mais avançadas e usam uma definição diferente de enumerabilidade mais adequada em um contexto de teoria dos conjuntos (isto é, bijeção com $\mathbb{N}$ ou um segmento inicial, em vez de ser listável ou ser a imagem de uma função sobrejetora de $\mathbb{Z}^+$).

siz.11 Enumerações e Conjuntos Enumeráveis

sfr:siz:enm-alt:
sec

Esta seção define enumerações como bijeções com (segmentos iniciais) de $\mathbb{N}$, como se faz em teoria dos conjuntos. Por isso difere ligeiramente das definições em [Seção siz.2](#) e repete os exemplos dessa seção. É também um pouco mais concisa.

Podemos especificar um conjunto finito simplesmente enumerando os seus membros. Fazemo-lo quando definimos um conjunto assim:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Supondo que os membros $a_1, \dots, a_n$ são todos distintos, obtemos uma bijeção entre A e os primeiros n números naturais $0, \dots, n-1$. Reciprocamente, como todo o conjunto finito tem apenas finitos membros, todo o conjunto finito pode ser posto nessa correspondência. Em outras palavras, se A é finito, existe uma bijeção entre A e $\{0, \dots, n-1\}$, onde n é o número de membros de A .

Se admitirmos certos tipos de conjuntos infinitos, admitiremos também que alguns conjuntos infinitos possam ser enumerados. Podemos precisar isto dizendo que um conjunto infinito é enumerado por uma bijeção entre ele e todo o $\mathbb{N}$.

Definição siz.26 (Enumeração, no sentido conjuntista). Uma *enumeração* de um conjunto A é uma bijeção cujo contradomínio é A e cujo domínio é ou um conjunto inicial de números naturais $\{0, 1, \dots, n\}$ ou todo o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Há uma base intuitiva para este uso da palavra *enumeração*. Dizer que enumeramos um conjunto A é dizer que existe uma bijeção f que nos permite contar os elementos do conjunto A . O elemento de índice 0 é $f(0)$, o de índice 1

é $f(1), \dots$ o de índice n é $f(n)$.² O raciocínio fica ainda mais claro com o seguinte:

Definição siz.27. Um conjunto A é **enumerável** se e só se $A = \emptyset$ ou existe uma enumeração de A . Dizemos que A é **não enumerável** se e só se A não é enumerável. sfr:siz:enm-alt: defn:enumerable

explanation Logo um conjunto é **enumerável** se e só se é vazio ou se podemos usar uma enumeração para contar os seus **membros**.

Exemplo siz.28. Uma função que enumera os números naturais é simplesmente a função identidade $\text{Id}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\text{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n$. Uma função que enumera os números naturais *positivos*, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, é a função $g(n) = n + 1$, isto é, a função sucessora.

Problema siz.29. Mostre que um conjunto A é **enumerável** se e só se $A = \emptyset$ ou existe uma **sobrejeção** $f: \mathbb{N} \rightarrow A$. Mostre que A é **enumerável** se e só se existe uma **injeção** $g: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemplo siz.29. As funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dadas por

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n \text{ e} \\ g(n) &= 2n + 1 \end{aligned}$$

enumeram, respectivamente, os números naturais pares e os ímpares. Mas nenhuma é **sobrejetiva**, logo nenhuma é uma enumeração de $\mathbb{N}$.

Problema siz.30. Defina uma enumeração dos quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, ...

Exemplo siz.30. Seja $\lceil x \rceil$ a função *teto*, que arredonda x por excesso para o inteiro mais próximo. Então a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

enumera o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccccccc} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & \dots \\ \left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \end{array}$$

Repare como f gera os valores de $\mathbb{Z}$ “saltitando” entre inteiros positivos e negativos. Também se pode ver f definida por casos assim:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

²Sim, contamos a partir de 0. Claro que também poderíamos começar em 1. Não faria grande diferença. Bastaria substituir $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}^+$.

Problema siz.31. Mostre que se A e B são **enumeráveis**, então $A \cup B$ também é.

Problema siz.32. Mostre por indução em n que se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todos **enumeráveis**, então $A_1 \cup \dots \cup A_n$ também é.

siz.12 Conjuntos Não Enumeráveis

sfr:siz:nen-alt:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade de $\mathbb{B}^\omega$ e de $\wp(\mathbb{N})$ usando as definições na **Seção siz.11**, isto é, exigindo uma bijeção com $\mathbb{N}$ em vez de uma sobrejeção a partir de $\mathbb{Z}^+$.

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é infinito. Também é trivialmente **enumerável**. O fato notável, porém, é que existem conjuntos **não enumeráveis**, isto é, conjuntos que não são **enumeráveis** (ver **Definição siz.27**). explanation

Isto pode surpreender. Afinal, dizer que A é **não enumerável** é dizer que **não** existe **bijeção** $f: \mathbb{N} \rightarrow A$; isto é, nenhuma função que mapeie os infinitos **membros** de $\mathbb{N}$ para A esgota todo A . Logo, se A é **não enumerável**, há “mais” **membros** em A do que números naturais.

Para provar que um conjunto é **não enumerável**, é preciso mostrar que não pode existir uma **bijeção** adequada. A melhor forma é mostrar que qualquer tentativa de enumerar **membros** de A tem de deixar pelo menos um **membro** de fora; isto mostra que nenhuma função $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ é **sobrejetiva**. Uma estratégia geral para o estabelecer é usar o *método diagonal* de Cantor. Dada uma lista de **membros** de A , digamos $x_1, x_2, \dots$, construímos outro **membro** de A que, pela sua construção, não pode estar nessa lista.

Tudo isto compreende-se melhor com um exemplo. O nosso primeiro exemplo é o conjunto $\mathbb{B}^\omega$ de todas as cadeias infinitas de 0s e 1s. (O símbolo ‘ $\mathbb{B}$ ’ significa binário, e podemos pensar nele como o conjunto de dois elementos $\{0, 1\}$.)

sfr:siz:nen-alt:
thm:nonenum-bin-omega

Teorema siz.31. $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável**.

Prova. Considere-se qualquer enumeração de um subconjunto de $\mathbb{B}^\omega$. Temos então uma lista $s_0, s_1, s_2, \dots$ em que cada s_n é uma cadeia infinita de 0s e 1s. Seja $s_n(m)$ o m -ésimo dígito da cadeia s_n . Podemos pois pensar na lista como uma matriz, colocando $s_n(m)$ na n -ésima linha e m -ésima coluna:

	0	1	2	3	...
0	$s_0(0)$	$s_0(1)$	$s_0(2)$	$s_0(3)$	...
1	$s_1(0)$	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	...
2	$s_2(0)$	$s_2(1)$	$s_2(2)$	$s_2(3)$	...
3	$s_3(0)$	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$s_3(3)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Construiremos agora uma cadeia infinita, d , de 0s e 1s que não está nesta lista, especificando cada uma das suas entradas, isto é, $d(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Intuitivamente, lemos a diagonal da matriz acima (daí o nome “método diagonal”) e trocamos cada 0 por 1 e cada 1 por 0. De modo mais abstrato, definimos $d(n)$ como 0 ou 1 consoante o n -ésimo **membro** da diagonal, $s_n(n)$, seja 1 ou 0, isto é:

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_n(n) = 0 \\ 0 & \text{se } s_n(n) = 1 \end{cases}$$

Claramente $d \in \mathbb{B}^\omega$, pois é uma cadeia infinita de 0s e 1s. Mas construímos d de modo que $d(n) \neq s_n(n)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, isto é, d difere de s_n na sua n -ésima entrada. Logo $d \neq s_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo que d não pode estar na lista $s_0, s_1, s_2, \dots$.

Mostramos assim que, dada uma enumeração arbitrária de algum subconjunto de $\mathbb{B}^\omega$, ela omite algum **membro** de $\mathbb{B}^\omega$. Logo não existe enumeração do conjunto $\mathbb{B}^\omega$, isto é, $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável**. $\square$

explanation

Este método de prova chama-se “diagonalização” porque usa a diagonal da matriz para definir d . Contudo, a diagonalização não exige necessariamente uma matriz. De fato, podemos mostrar que um conjunto é **não enumerável** por uma ideia semelhante mesmo quando não há matriz nem diagonal literal. O resultado seguinte ilustra como.

Teorema siz.32. $\wp(\mathbb{N})$ não é **enumerável**.

*sfr:siz:nen-alt:
thm:nonenum-pownat*

Prova. Procedemos da mesma forma, mostrando que qualquer lista de subconjuntos de $\mathbb{N}$ omite algum subconjunto de $\mathbb{N}$. Suponhamos, pois, que temos uma lista $N_0, N_1, N_2, \dots$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Definimos um conjunto D assim: $n \in D$ sse $n \notin N_n$:

$$D = \{n \in \mathbb{N} : n \notin N_n\}$$

Claramente $D \subseteq \mathbb{N}$. Mas D não pode estar na lista: por construção, $n \in D$ sse $n \notin N_n$, logo $D \neq N_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. $\square$

explanation

A prova precedente não mencionou uma diagonal. Ainda assim, pode pensar-se nela como envolvendo uma diagonal, imaginando os conjuntos $N_0, N_1, \dots$ dispostos numa matriz em que escrevemos N_n na n -ésima linha colocando m na m -ésima coluna sse $m \in N_n$. Por exemplo, se os primeiros quatro conjuntos da lista são $\{0, 1, 2, \dots\}$, $\{1, 3, 5, \dots\}$, $\{0, 1, 4\}$ e $\{2, 3, 4, \dots\}$, a matriz começaria com

$$\begin{array}{ccccccc} N_0 = \{ & \mathbf{0}, & 1, & 2, & & \dots \} \\ N_1 = \{ & & \mathbf{1}, & & 3, & 5, & \dots \} \\ N_2 = \{ & 0, & 1, & & & 4 & \} \\ N_3 = \{ & & & 2, & \mathbf{3}, & 4, & \dots \} \\ & \vdots & & & & & \ddots \end{array}$$

Então D é o conjunto obtido percorrendo a diagonal, pondo $n \in D$ sse n não está na diagonal. No caso acima, excluirmos 0 e 1, incluiríamos 2, excluirmos 3, etc.

Problema siz.33. Mostre que o conjunto de todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é não enumerável por um argumento diagonal explícito. Isto é, mostre que, se $f_1, f_2, \dots$ é uma lista de funções e cada $f_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, então existe alguma $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que não está nesta lista.

siz.13 Redução

sfr:siz:red-alt:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade por redução, alinhada com os resultados na Seção siz.12. Uma versão alternativa, ligeiramente mais elaborada, alinhada com os resultados na Seção siz.6, encontra-se na Seção siz.7.

Provamos que $\mathbb{B}^\omega$ é não enumerável por um argumento de diagonalização. Usamos um argumento semelhante para mostrar que $\wp(\mathbb{N})$ é não enumerável. Há outra forma de provar que $\wp(\mathbb{N})$ é não enumerável: mostrar que se $\wp(\mathbb{N})$ é enumerável então $\mathbb{B}^\omega$ também é enumerável. Como sabemos que $\mathbb{B}^\omega$ é não enumerável, segue que $\wp(\mathbb{N})$ também o é.

Isto chama-se *reduzir* um problema a outro. Neste caso, reduzimos o problema de enumerar $\mathbb{B}^\omega$ ao problema de enumerar $\wp(\mathbb{N})$. Uma solução para este último—uma enumeração de $\wp(\mathbb{N})$ —daria uma solução para o primeiro—uma enumeração de $\mathbb{B}^\omega$.

Para reduzir o problema de enumerar um conjunto B ao de enumerar um conjunto A , indicamos uma forma de transformar uma enumeração de A numa enumeração de B . A forma mais simples é definir uma **sobrejeção** $f: A \rightarrow B$. Se $x_1, x_2, \dots$ enumeram A , então $f(x_1), f(x_2), \dots$ enumerariam B . No nosso caso, procuramos uma **sobrejeção** $f: \wp(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$.

Problema siz.34. Mostre que, se existir uma função **injetiva** $g: B \rightarrow A$, e B for não enumerável, então A também o é. Faça-o mostrando como pode usar g para transformar uma enumeração de A numa de B .

Prova do Teorema siz.32 por redução. Para a redução, suponhamos que $\wp(\mathbb{N})$ é enumerável e portanto que existe uma enumeração $N_1, N_2, N_3, \dots$

Definimos a função $f: \wp(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$ pondo $f(N)$ igual à cadeia s_k tal que $s_k(n) = 1$ sse $n \in N$, e $s_k(n) = 0$ caso contrário.

Isto define claramente uma função, pois sempre que $N \subseteq \mathbb{N}$, qualquer $n \in \mathbb{N}$ ou é um **membro** de N ou não é. Por exemplo, o conjunto $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ dos naturais pares é mapeado para a cadeia 1010101...; $\emptyset$ é mapeado para 0000...; $\mathbb{N}$ é mapeado para 1111....

Também é **sobrejetiva**: toda a cadeia de 0s e 1s corresponde a algum conjunto de números naturais, nomeadamente aquele que tem como membros os naturais nas posições em que a cadeia tem um 1. Com mais precisão, se $s \in \mathbb{B}^\omega$, defina-se $N \subseteq \mathbb{N}$ por:

$$N = \{n \in \mathbb{N} : s(n) = 1\}$$

Então $f(N) = s$, como se verifica consultando a definição de f .

Consideremos agora a lista

$$f(N_1), f(N_2), f(N_3), \dots$$

Como f é **sobrejetiva**, todo o membro de $\mathbb{B}^\omega$ tem de aparecer como valor de f para algum argumento, e portanto na lista. Esta lista teria de enumerar todo $\mathbb{B}^\omega$.

Logo, se $\wp(\mathbb{N})$ fosse **enumerável**, $\mathbb{B}^\omega$ seria **enumerável**. Mas $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável** (**Teorema siz.31**). Logo $\wp(\mathbb{N})$ é **não enumerável**. $\square$

Problema siz.35. Mostre que o conjunto X de todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é **não enumerável** por um argumento de redução (Sugestão: dê uma função sobrejetora de X para $\mathbb{B}^\omega$.)

Problema siz.36. Mostre que o conjunto de todos os *conjuntos de* pares de números naturais, isto é, $\wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.37. Mostre que $\mathbb{N}^\omega$, o conjunto das sequências infinitas de números naturais, é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.38. Seja S o conjunto de todas as **sobrejeções** de $\mathbb{N}$ para o conjunto $\{0, 1\}$, isto é, S consiste em todas as **sobrejeções** $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{B}$. Mostre que S é **não enumerável**.

Problema siz.39. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é **não enumerável**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

- Cantor, Georg. 1892. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 1: 75–8.
- Frege, Gottlob. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau: Wilhelm Koebner. Translation in Frege (1953).
- Frege, Gottlob. 1953. *Foundations of Arithmetic*, ed. J. L. Austin. Oxford: Basil Blackwell & Mott, 2nd ed.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.