

siz.1 Redução

sfr:siz:red:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade por redução, correspondendo aos resultados na ???. Uma versão alternativa, ligeiramente mais condensada, correspondente aos resultados na ???, é fornecida na ???.

Mostramos $\wp(\mathbb{Z}^+)$ como **não enumerável** por um argumento de diagonalização. Já tínhamos uma prova de que $\mathbb{B}^\omega$, o conjunto de todas as sequências infinitas de 0s e 1s, é **não enumerável**. Eis outra maneira de provar que $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **não enumerável**: mostre que *se* $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **enumerável**, *então* $\mathbb{B}^\omega$ *também é enumerável*. Como sabemos que $\mathbb{B}^\omega$ não é **enumerável**, $\wp(\mathbb{Z}^+)$ também não pode ser. Isso é chamado de *reduzir* um problema a outro—neste caso, reduzimos o problema de enumerar $\mathbb{B}^\omega$ ao problema de enumerar $\wp(\mathbb{Z}^+)$. Uma solução para o último—uma enumeração de $\wp(\mathbb{Z}^+)$ —daria uma solução para o primeiro—uma enumeração de $\mathbb{B}^\omega$.

Como reduzimos o problema de enumerar um conjunto B ao de enumerar um conjunto A ? Fornecemos uma maneira de transformar uma enumeração de A em uma enumeração de B . A maneira mais fácil de fazer isso é definir uma função **sobrejetiva** $f: A \rightarrow B$. Se $x_1, x_2, \dots$ enumera A , então $f(x_1), f(x_2), \dots$ enumeraria B . Em nosso caso, procuramos uma função sobrejetora $f: \wp(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$.

Problema siz.1. Mostre que se há uma função **injetiva** $g: B \rightarrow A$, e B é **não enumerável**, então A também é. Faça isso mostrando como você pode usar g para transformar uma enumeração de A em uma de B .

Prova do ??? por redução. Suponha que $\wp(\mathbb{Z}^+)$ fosse **enumerável**, e portanto que há uma enumeração dele, $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$

Defina a função $f: \wp(\mathbb{Z}^+) \rightarrow \mathbb{B}^\omega$ fazendo $f(Z)$ ser a sequência s_k tal que $s_k(n) = 1$ sse $n \in Z$, e $s_k(n) = 0$ caso contrário. Isso define claramente uma função, já que sempre que $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$, qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$ ou é **um membro** de Z ou não é. Por exemplo, o conjunto $2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, 6, \dots\}$ dos pares positivos é mapeado para a sequência 010101..., o conjunto vazio é mapeado para 0000... e o conjunto $\mathbb{Z}^+$ para 1111....

Também é **sobrejetiva**: toda sequência de 0s e 1s corresponde a algum conjunto de inteiros positivos, nomeadamente aquele que tem como membros os inteiros correspondentes às posições onde a sequência tem 1s. Mais precisamente, suponha $s \in \mathbb{B}^\omega$. Defina $Z \subseteq \mathbb{Z}^+$ por:

$$Z = \{n \in \mathbb{Z}^+ : s(n) = 1\}$$

Então $f(Z) = s$, como pode ser verificado consultando a definição de f .

Agora considere a lista

$$f(Z_1), f(Z_2), f(Z_3), \dots$$

Como f é **sobrejetiva**, todo membro de $\mathbb{B}^\omega$ deve aparecer como valor de f para algum argumento, e assim deve aparecer na lista. Essa lista portanto deve enumerar todo $\mathbb{B}^\omega$.

Assim, se $\wp(\mathbb{Z}^+)$ fosse **enumerável**, $\mathbb{B}^\omega$ seria **enumerável**. Mas $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável** (??). Logo $\wp(\mathbb{Z}^+)$ é **não enumerável**. $\square$

explanation É fácil confundir a direção em que a redução vai. Por exemplo, uma função **sobrejetiva** $g: \mathbb{B}^\omega \rightarrow B$ **não** estabelece que B é **não enumerável**. (Considere $g: \mathbb{B}^\omega \rightarrow \mathbb{B}$ definida por $g(s) = s(1)$, a função que mapeia uma sequência de 0s e 1s para seu primeiro **membro**. Ela é **sobrejetiva**, porque algumas sequências começam com 0 e outras começam com 1. Mas $\mathbb{B}$ é finito.) Note também que a função f deve ser **sobrejetiva**, caso contrário o argumento não se sustenta: $f(x_1), f(x_2), \dots$ não estariam garantidos de incluir todos os **membros** de B . Por exemplo,

$$h(n) = \underbrace{000 \dots 0}_{n \text{ 0s}}$$

define uma função $h: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{B}^\omega$, mas $\mathbb{Z}^+$ é **enumerável**.

Problema siz.2. Mostre que o conjunto de todos os *conjuntos* de pares de inteiros positivos é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.3. Mostre que o conjunto X de todas as funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é **não enumerável** por um argumento de redução (Dica: dê uma função sobrejetora de X para $\mathbb{B}^\omega$.)

Problema siz.4. Mostre que $\mathbb{N}^\omega$, o conjunto de sequências infinitas de números naturais, é **não enumerável** por um argumento de redução.

Problema siz.5. Seja P o conjunto de funções do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0\}$, e seja Q o conjunto de funções *parciais* do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0\}$. Mostre que P é **enumerável** e Q não é. (Dica: reduza o problema de enumerar $\mathbb{B}^\omega$ a enumerar Q).

Problema siz.6. Seja S o conjunto de todas as funções **sobrejetivas** do conjunto dos inteiros positivos para o conjunto $\{0,1\}$, isto é, S consiste de todas as **sobrejetivas** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{B}$. Mostre que S é **não enumerável**.

Problema siz.7. Mostre que o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é **não enumerável**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas