

siz.1 Uma Função de Emparelhamento Alternativa

sfr:siz:pai-alt:
sec

Há outras enumerações de $\mathbb{N}^2$ que facilitam descobrir quais são suas inversas. Eis uma. Em vez de visualizar a enumeração em uma matriz, comece com a lista de inteiros positivos associados a espaços (inicialmente) vazios. Imagine preencher esses espaços sucessivamente com pares $\langle n, m \rangle$ da seguinte forma. Começando com os pares que têm 0 na primeira posição (isto é, pares $\langle 0, m \rangle$), coloque o primeiro (isto é, $\langle 0, 0 \rangle$) no primeiro espaço vazio, depois pule um espaço vazio, coloque o segundo (isto é, $\langle 0, 2 \rangle$) no próximo espaço vazio, pule outro, e assim por diante. O começo (incompleto) de nossa enumeração agora se parece com isto

explanation

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$		$\langle 0, 1 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$		$\langle 0, 3 \rangle$		$\langle 0, 4 \rangle$		...

Repita isso com pares $\langle 1, m \rangle$ nos lugares que ainda permanecem vazios, novamente pulando cada outro espaço vazio:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$		$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$		$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	...

Insira pares $\langle 2, m \rangle$, $\langle 2, m \rangle$, etc., da mesma forma. Nossa enumeração completa assim começa assim:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\langle 0, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 2, 0 \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 0, 3 \rangle$	$\langle 3, 0 \rangle$	$\langle 0, 4 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$	...

Se numerarmos as células na matriz acima de acordo com essa enumeração, não encontraremos uma linha zigue-zague arrumada, mas este arranjo:

	0	1	2	3	4	5	...
0	1	3	5	7	9	11	...
1	2	6	10	14	18	...	...
2	4	12	20	28	...	...	...
3	8	24	40	...	...	...	...
4	16	48	...	...	...	...	...
5	32	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Podemos ver que os pares na linha 0 estão nas posições ímpares de nossa enumeração, isto é, o par $\langle 0, m \rangle$ está na posição $2m + 1$; os pares na segunda linha, $\langle 1, m \rangle$, estão em posições cujo número é o dobro de um número ímpar, especificamente, $2 \cdot (2m + 1)$; os pares na terceira linha, $\langle 2, m \rangle$, estão em posições cujo número é quatro vezes um número ímpar, $4 \cdot (2m + 1)$; e assim por diante. Os fatores de $(2m + 1)$ para cada linha, 1, 2, 4, 8, ..., são exatamente as potências de 2: $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, ... De fato, o expoente

relevante é sempre o primeiro membro do par em questão. Assim, para o par $\langle n, m \rangle$ o fator é 2^n . Isso nos dá a fórmula geral: $2^n \cdot (2m + 1)$. Contudo, isso é um mapeamento de pares para inteiros *positivos*, isto é, $\langle 0, 0 \rangle$ tem posição 1. Se quisermos começar na posição 0 devemos subtrair 1 do resultado. Isso nos dá:

Exemplo siz.1. A função $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$h(n, m) = 2^n(2m + 1) - 1$$

é uma função de emparelhamento para o conjunto de pares de números naturais $\mathbb{N}^2$.

explanation

De acordo com nossa segunda enumeração de $\mathbb{N}^2$, o par $\langle 0, 0 \rangle$ tem código $h(0, 0) = 2^0(2 \cdot 0 + 1) - 1 = 0$; $\langle 1, 2 \rangle$ tem código $2^1 \cdot (2 \cdot 2 + 1) - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$; $\langle 2, 6 \rangle$ tem código $2^2 \cdot (2 \cdot 6 + 1) - 1 = 51$.

Às vezes basta codificar pares de números naturais $\mathbb{N}^2$ sem exigir que a codificação seja sobrejetora. Tais codificações têm inversas que são apenas funções parciais.

Exemplo siz.2. A função $j: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^+$ dada por

$$j(n, m) = 2^n 3^m$$

é uma função *injetiva* $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas