

siz.1 Conjuntos Não enumeráveis

sfr:siz:nen:
sec

Esta seção prova a não enumerabilidade de $\mathbb{B}^\omega$ e $\wp(\mathbb{Z}^+)$ usando a definição na ???. Foi concebida para ser um pouco mais elementar e um pouco mais detalhada que a versão na ???.

Alguns conjuntos, como o conjunto $\mathbb{Z}^+$ dos inteiros positivos, são infinitos. Até agora vimos exemplos de conjuntos infinitos que eram todos **enumerável**. Contudo, há também conjuntos infinitos que não têm essa propriedade. Tais conjuntos são chamados de **não enumerável**.

Em primeiro lugar, talvez já seja surpreendente que existam conjuntos **não enumerável**. Para qualquer conjunto **enumerável** A há uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Se um conjunto é **não enumerável**, não há tal função. Isto é, nenhuma função mapeando os infinitos **membros** de $\mathbb{Z}^+$ para A pode esgotar todo A . Assim, há “mais” **membros** em A do que os infinitos inteiros positivos.

Como se provaria que um conjunto é **não enumerável**? É preciso mostrar que nenhuma tal função sobrejetora pode existir. Equivalentemente, é preciso mostrar que os elementos de A não podem ser enumerados em uma lista infinita unidirecional. A melhor maneira de fazer isso é mostrar que toda lista de **membros** de A deve deixar de fora pelo menos um elemento; ou que nenhuma função $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ pode ser **sobrejetiva**. Podemos fazer isso usando o *método diagonal* de Cantor. Dada uma lista de **membros** de A , digamos, $x_1, x_2, \dots$, construímos outro elemento de A que, por sua construção, não pode estar naquela lista.

Nosso primeiro exemplo é o conjunto $\mathbb{B}^\omega$ de todas as seqüências infinitas, sem lacunas, de 0s e 1s.

sfr:siz:nen:
thm:nonenum-bin-omega

Teorema siz.1. $\mathbb{B}^\omega$ é **não enumerável**.

Prova. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{B}^\omega$ é **enumerável**, isto é, suponha que há uma lista $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ de todos os **membros** de $\mathbb{B}^\omega$. Cada um desses s_i é em si uma seqüência infinita de 0s e 1s. Chamemos o j -ésimo elemento da i -ésima seqüência nessa lista de $s_i(j)$. Então a i -ésima seqüência s_i é

$$s_i(1), s_i(2), s_i(3), \dots$$

Podemos organizar essa lista, e os elementos de cada seqüência s_i nela, em uma matriz:

	1	2	3	4	...
1	$s_1(1)$	$s_1(2)$	$s_1(3)$	$s_1(4)$	...
2	$s_2(1)$	$s_2(2)$	$s_2(3)$	$s_2(4)$	...
3	$s_3(1)$	$s_3(2)$	$s_3(3)$	$s_3(4)$	...
4	$s_4(1)$	$s_4(2)$	$s_4(3)$	$s_4(4)$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Os rótulos ao lado indicam o número da sequência na lista $s_1, s_2, \dots$; os números no topo rotulam os **membros** das sequências individuais. Por exemplo, $s_1(1)$ é um nome para qualquer número, um 0 ou um 1, que é o primeiro **membro** na sequência s_1 , e assim por diante.

Agora construímos uma sequência infinita, $\bar{s}$, de 0s e 1s que não pode estar nessa lista. A definição de $\bar{s}$ dependerá da lista $s_1, s_2, \dots$. Qualquer lista infinita de sequências infinitas de 0s e 1s dá origem a uma sequência infinita $\bar{s}$ que está garantidamente fora da lista.

Para definir $\bar{s}$, especificamos todos os seus **membros**, isto é, especificamos $\bar{s}(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Fazemos isso lendo a diagonal da matriz acima (daí o nome “método diagonal”) e depois trocando cada 1 por 0 e cada 0 por 1. De maneira mais abstrata, definimos $\bar{s}(n)$ como 0 ou 1 conforme o n -ésimo **membro** da diagonal, $s_n(n)$, é 1 ou 0.

$$\bar{s}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_n(n) = 0 \\ 0 & \text{se } s_n(n) = 1. \end{cases}$$

Se você prefere fórmulas a definições por casos, também pode definir $\bar{s}(n) = 1 - s_n(n)$.

Claramente $\bar{s}$ é uma sequência infinita de 0s e 1s, já que é apenas a sequência espelhada da sequência de 0s e 1s que aparecem na diagonal de nossa matriz. Assim $\bar{s}$ é um **membro** de $\mathbb{B}^\omega$. Mas não pode estar na lista $s_1, s_2, \dots$. Por quê?

Não pode ser a primeira sequência na lista, s_1 , porque difere de s_1 no primeiro **membro**. Seja qual for $s_1(1)$, definimos $\bar{s}(1)$ como o oposto. Não pode ser a segunda sequência na lista, porque $\bar{s}$ difere de s_2 no segundo elemento: se $s_2(2)$ é 0, $\bar{s}(2)$ é 1, e vice-versa. E assim por diante.

Mais precisamente: se $\bar{s}$ estivesse na lista, haveria algum k tal que $\bar{s} = s_k$. Duas sequências são idênticas sse concordam em toda posição, isto é, para qualquer n , $\bar{s}(n) = s_k(n)$. Em particular, tomando $n = k$ como caso especial, $\bar{s}(k) = s_k(k)$ teria de valer. $s_k(k)$ é 0 ou 1. Se é 0, então $\bar{s}(k)$ deve ser 1—é assim que definimos $\bar{s}$. Mas se $s_k(k) = 1$, de novo por causa da forma como definimos $\bar{s}$, $\bar{s}(k) = 0$. Em ambos os casos $\bar{s}(k) \neq s_k(k)$.

Começamos supondo que há uma lista de **membros** de $\mathbb{B}^\omega$, $s_1, s_2, \dots$. A partir dessa lista construímos uma sequência $\bar{s}$ que provamos não poder estar na lista. Mas ela definitivamente é uma sequência de 0s e 1s se todos os s_i são sequências de 0s e 1s, isto é, $\bar{s} \in \mathbb{B}^\omega$. Isso mostra em particular que não pode haver lista de *todos* os **membros** de $\mathbb{B}^\omega$, já que para qualquer tal lista também poderíamos construir uma sequência $\bar{s}$ garantidamente fora da lista, de modo que a suposição de que há uma lista de todas as sequências em $\mathbb{B}^\omega$ leva a uma contradição. $\square$

explanation Esse método de prova é chamado de “diagonalização” porque usa a diagonal da matriz para definir $\bar{s}$. A diagonalização não precisa envolver a presença de uma matriz: podemos mostrar que conjuntos não são **enumerável** usando uma ideia semelhante mesmo quando não há matriz nem diagonal propriamente dita.

sfr:siz:nen:
thm:nonenum-pownat

Teorema siz.2. $\wp(\mathbb{Z}^+)$ não é *enumerável*.

Prova. Procedemos da mesma forma, mostrando que para toda lista de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$ há um subconjunto de $\mathbb{Z}^+$ que não pode estar na lista. Suponha que a seguinte é uma lista dada de subconjuntos de $\mathbb{Z}^+$:

$$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$$

Agora definimos um conjunto $\bar{Z}$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \bar{Z}$ sse $n \notin Z_n$:

$$\bar{Z} = \{n \in \mathbb{Z}^+ : n \notin Z_n\} \quad \square$$

$\bar{Z}$ é claramente um conjunto de inteiros positivos, já que por suposição cada Z_n o é, e assim $\bar{Z} \in \wp(\mathbb{Z}^+)$. Mas $\bar{Z}$ não pode estar na lista. Para mostrar isso, estabeleceremos que para cada $k \in \mathbb{Z}^+$, $\bar{Z} \neq Z_k$.

Seja $k \in \mathbb{Z}^+$ arbitrário. Definimos $\bar{Z}$ de modo que para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \bar{Z}$ sse $n \notin Z_n$. Em particular, tomando $n = k$, $k \in \bar{Z}$ sse $k \notin Z_k$. Mas isso mostra que $\bar{Z} \neq Z_k$, já que k é *um membro* de um mas não do outro, e assim $\bar{Z}$ e Z_k têm *membros* diferentes. Como k foi arbitrário, $\bar{Z}$ não está na lista $Z_1, Z_2, \dots$

A prova precedente não mencionou uma diagonal, mas você pode pensar nela como envolvendo uma diagonal se a imaginar assim: imagine os conjuntos $Z_1, Z_2, \dots$, escritos em uma matriz, onde cada *membro* $j \in Z_i$ é listado na j -ésima coluna. Digamos que os primeiros quatro conjuntos nessa lista são $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{2, 4, 6, \dots\}$, $\{1, 2, 5\}$ e $\{3, 4, 5, \dots\}$. Então a matriz começaria com

$$\begin{array}{ccccccccc} Z_1 = \{ & \mathbf{1}, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \dots \} \\ Z_2 = \{ & & \mathbf{2}, & & 4, & & 6, & \dots \} \\ Z_3 = \{ & 1, & 2, & & & 5 & & \} \\ Z_4 = \{ & & & 3, & \mathbf{4}, & 5, & 6, & \dots \} \\ & \vdots & & & & \ddots & & \end{array}$$

Então $\bar{Z}$ é o conjunto obtido percorrendo a diagonal, deixando de fora quaisquer números que aparecem ao longo da diagonal e incluindo aqueles j onde a matriz tem uma lacuna na j -ésima linha/coluna. No caso acima, deixaríamos de fora 1 e 2, incluiríamos 3, deixaríamos de fora 4, etc.

Problema siz.1. Mostre que $\wp(\mathbb{N})$ é *não enumerável* por um argumento diagonal.

Problema siz.2. Mostre que o conjunto de funções $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ é *não enumerável* por um argumento diagonal explícito. Isto é, mostre que se $f_1, f_2, \dots$, é uma lista de funções e cada $f_i: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$, então há alguma $\bar{f}: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ fora dessa lista.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas