

siz.1 Enumerações e Conjuntos Enumeráveis

sfr:siz:enm:
sec

Esta seção discute enumerações de conjuntos, definindo-as como sobrejeções de $\mathbb{Z}^+$. Faz as coisas devagar, para leitores com pouca formação matemática. Uma versão alternativa, mais concisa, é dada na ??, que define enumerações de outro modo: como bijeções com $\mathbb{N}$ (ou um segmento inicial).

Já demos exemplos de conjuntos listando seus **membros**. Discutamos agora, de maneira mais geral, como e quando podemos listar os **membros** de um conjunto, mesmo que esse conjunto seja infinito. explanation

Definição siz.1 (Enumeração, informalmente). Informalmente, uma *enumeração* de um conjunto A é uma lista (possivelmente infinita) de **membros** de A tal que todo **membro** de A aparece na lista em alguma posição finita. Se A tem uma enumeração, então diz-se que A é *enumerável*.

Alguns pontos sobre enumerações:

explanation

1. Contamos como enumerações apenas listas que têm um começo e em que todo **membro** além do primeiro tem um único **membro** imediatamente anterior. Em outras palavras, há apenas um número finito de elementos entre o primeiro **membro** da lista e qualquer outro **membro**. Em particular, isso significa que todo **membro** de uma enumeração tem uma posição finita: o primeiro **membro** tem posição 1, o segundo posição 2, etc.
2. Podemos ter enumerações diferentes do mesmo conjunto A que diferem pela ordem em que os **membros** aparecem: 4, 1, 25, 16, 9 enumera os (conjunto dos) cinco primeiros quadrados tão bem quanto 1, 4, 9, 16, 25.
3. Enumerações redundantes ainda são enumerações: 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... enumera o mesmo conjunto que 1, 2, 3, ...
4. Ordem e redundância *importam* quando especificamos uma enumeração: podemos enumerar os inteiros positivos começando com 1, 2, 3, 1, ..., mas o padrão é mais fácil de ver quando enumerados da maneira padrão como 1, 2, 3, 4, ...
5. Enumerações devem ter um começo: ..., 3, 2, 1 não é uma enumeração dos inteiros positivos porque não tem primeiro **membro**. Para ver como isso segue da definição informal, pergunte a si mesmo: “em que posição na lista o número 76 aparece?”
6. O seguinte não é uma enumeração dos inteiros positivos: 1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ... O problema é que os números pares ocorrem nas posições $\infty + 1$, $\infty + 2$, $\infty + 3$, em vez de em posições finitas.

7. O conjunto vazio é **enumerável**: é enumerado pela lista vazia!

Proposição siz.2. Se A tem uma enumeração, tem uma enumeração sem repetições.

Prova. Suponha que A tem uma enumeração $x_1, x_2, \dots$ em que cada x_i é um **membro** de A . Podemos remover repetições de uma enumeração removendo **membros** repetidos. Por exemplo, podemos transformar a enumeração em uma nova na qual listamos x_i se ele é um **membro** de A que não está entre $x_1, \dots, x_{i-1}$ ou removemos x_i da lista se já aparece entre $x_1, \dots, x_{i-1}$. $\square$

O último argumento mostra que, para obter um bom controle sobre enumerações e conjuntos **enumeráveis** e provar coisas sobre eles, precisamos de uma definição mais precisa. O seguinte a fornece.

Definição siz.3 (Enumeração, formalmente). Uma *enumeração* de um conjunto $A \neq \emptyset$ é qualquer função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

explanation

Convençamo-nos de que a definição formal e a definição informal usando uma lista possivelmente infinita são equivalentes. Primeiro, qualquer função **sobrejetiva** de $\mathbb{Z}^+$ para um conjunto A enumera A . Tal função determina uma enumeração conforme definido informalmente acima: a lista $f(1), f(2), f(3), \dots$. Como f é **sobrejetiva**, todo **membro** de A é garantidamente o valor de $f(n)$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Logo, todo **membro** de A aparece em alguma posição finita na lista. Como a função pode não ser **injetiva**, a lista pode ser redundante, mas isso é aceitável (como observado acima).

Por outro lado, dada uma lista que enumera todos os **membros** de A , podemos definir uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ fazendo $f(n)$ ser o n -ésimo **membro** da lista, ou o último **membro** da lista se não há n -ésimo **membro**. O único caso em que isso não produz uma função **sobrejetiva** é quando A é vazio, e portanto a lista é vazia. Assim, toda lista não vazia determina uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

Definição siz.4. Um conjunto A é **enumerável** sse é vazio ou tem uma enumeração.

sfr:siz:enm:
defn:enumerable

Exemplo siz.5. Uma função que enumera os inteiros positivos ($\mathbb{Z}^+$) é simplesmente a função identidade dada por $f(n) = n$. Uma função que enumera os números naturais $\mathbb{N}$ é a função $g(n) = n - 1$.

Exemplo siz.6. As funções $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ e $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ dadas por

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n \text{ e} \\ g(n) &= 2n - 1 \end{aligned}$$

enumeram os inteiros positivos pares e os inteiros positivos ímpares, respectivamente. Contudo, nenhuma das funções é uma enumeração de $\mathbb{Z}^+$, já que nenhuma é **sobrejetiva**.

Problema siz.1. Defina uma enumeração dos quadrados positivos 1, 4, 9, 16, ...

Exemplo siz.7. A função $f(n) = (-1)^n \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ (onde $\lceil x \rceil$ denota a função *teto*, que arredonda x para cima até o inteiro mais próximo) enumera o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Note como f gera os valores de $\mathbb{Z}$ “saltando” de um lado para outro entre inteiros positivos e negativos:

$$\begin{array}{cccccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & f(7) & \dots \\ -\lceil \frac{0}{2} \rceil & \lceil \frac{1}{2} \rceil & -\lceil \frac{2}{2} \rceil & \lceil \frac{3}{2} \rceil & -\lceil \frac{4}{2} \rceil & \lceil \frac{5}{2} \rceil & -\lceil \frac{6}{2} \rceil & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \dots \end{array}$$

Você também pode pensar em f como definida por casos da seguinte forma:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 1 \\ n/2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -(n-1)/2 & \text{se } n \text{ é ímpar e } > 1 \end{cases}$$

Problema siz.2. Mostre que se A e B são **enumeráveis**, então $A \cup B$ também é. Para isso, suponha que há funções **sobrejetivas** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ e $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow B$, e defina uma função **sobrejetiva** $h: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A \cup B$ e mostre que ela é **sobrejetiva**. Considere também os casos em que A ou $B = \emptyset$.

Problema siz.3. Mostre que se $B \subseteq A$ e A é **enumerável**, então B também é. Para isso, suponha que há uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Defina uma função **sobrejetiva** $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow B$ e mostre que ela é **sobrejetiva**. O que acontece se $B = \emptyset$?

Problema siz.4. Mostre por indução em n que se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todos **enumeráveis**, então $A_1 \cup \dots \cup A_n$ também é. Você pode assumir o fato de que se dois conjuntos A e B são **enumeráveis**, então $A \cup B$ também é.

Embora seja talvez mais natural ao listar os **membros** de um conjunto começar a contar a partir do 1º **membro**, os matemáticos gostam de usar os números naturais $\mathbb{N}$ para contar coisas. Eles falam do 0º, 1º, 2º, e assim por diante, **membro** de uma lista. Correspondentemente, podemos definir uma enumeração como uma função **sobrejetiva** de $\mathbb{N}$ para A . É claro que as duas definições são equivalentes.

sfr:siz:enm:
prop:enum-shift **Proposição siz.8.** Há uma **sobrejeção** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ sse há uma **sobrejeção** $g: \mathbb{N} \rightarrow A$.

Prova. Dada uma **sobrejeção** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$, podemos definir $g(n) = f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ é **sobrejetiva**. Reciprocamente, dada uma **sobrejeção** $g: \mathbb{N} \rightarrow A$, defina $f(n) = g(n-1)$. $\square$

Isso nos dá o seguinte resultado:

Corolário siz.9. *Um conjunto A é **enumerável** sse é vazio ou há uma função **sobrejetiva** $f: \mathbb{N} \rightarrow A$.*

*sfr:siz:enm:
cor:enum-nat*

Discutimos acima que uma lista de **membros** de um conjunto A pode ser transformada em uma lista sem repetições. Isso também vale para enumerações, mas é um pouco mais difícil de formular e provar rigorosamente. Qualquer função $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ deve estar definida para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Se há apenas um número finito de **membros** em A , então claramente não podemos ter uma função definida nos infinitos **membros** de $\mathbb{Z}^+$ que toma como valores todos os **membros** de A mas nunca toma o mesmo valor duas vezes. Nesse caso, isto é, no caso em que a lista sem repetições é finita, devemos escolher um domínio diferente para f , um com apenas um número finito de **membros**. Não ter repetições significa que f deve ser **injetiva**. Como também é **sobrejetiva**, estamos procurando **uma bijeção** entre algum conjunto finito $\{1, \dots, n\}$ ou $\mathbb{Z}^+$ e A .

Proposição siz.10. *Se $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$ é **sobrejetiva** (isto é, uma enumeração de A), há **uma bijeção** $g: Z \rightarrow A$ onde Z é $\mathbb{Z}^+$ ou $\{1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$.*

*sfr:siz:enm:
prop:enum-bij*

Prova. Definimos a função g recursivamente: seja $g(1) = f(1)$. Se $g(i)$ já foi definido, seja $g(i+1)$ o primeiro valor de $f(1), f(2), \dots$ que ainda não está entre $g(1), \dots, g(i)$, se houver um. Se A tem apenas n **membros**, então $g(1), \dots, g(n)$ estão todos definidos, e assim definimos uma função $g: \{1, \dots, n\} \rightarrow A$. Se A tem infinitos **membros**, então para qualquer i deve haver **um membro** de A na enumeração $f(1), f(2), \dots$, que ainda não está entre $g(1), \dots, g(i)$. Nesse caso definimos uma função $g: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

A função g é **sobrejetiva**, já que qualquer elemento de A está entre $f(1), f(2), \dots$ (pois f é **sobrejetiva**) e assim eventualmente será um valor de $g(i)$ para algum i . Também é **injetiva**, já que se houvesse $j < i$ tal que $g(j) = g(i)$, então $g(i)$ já estaria entre $g(1), \dots, g(i-1)$, contrariamente à forma como definimos g . $\square$

Corolário siz.11. *Um conjunto A é **enumerável** sse é vazio ou há **uma bijeção** $f: N \rightarrow A$ onde $N = \mathbb{N}$ ou $N = \{0, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

*sfr:siz:enm:
cor:enum-nat-bij*

Prova. A é **enumerável** sse A é vazio ou há **uma sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Pela **Proposição siz.10**, o último vale sse há uma função **bijetiva** $f: Z \rightarrow A$ onde $Z = \mathbb{Z}^+$ ou $Z = \{1, \dots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Pelo mesmo argumento da prova da **Proposição siz.8**, isso por sua vez é o caso sse há **uma bijeção** $g: N \rightarrow A$ onde $N = \mathbb{N}$ ou $N = \{0, \dots, n-1\}$. $\square$

Problema siz.5. De acordo com a **Definição siz.4**, um conjunto A é **enumerável** sse $A = \emptyset$ ou há **uma sobrejetiva** $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$. Também é possível definir “conjunto **enumerável**” precisamente por: um conjunto é **enumerável**

sse há uma função injetiva $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Mostre que as definições são equivalentes, isto é, mostre que há uma função injetiva $g: A \rightarrow \mathbb{Z}^+$ sse $A = \emptyset$ ou há uma sobrejetiva $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow A$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas