

siz.1 Enumerações e Conjuntos Enumeráveis

sfr:siz:enm-alt:
sec

Esta seção define enumerações como bijeções com (segmentos iniciais) de $\mathbb{N}$, como se faz em teoria dos conjuntos. Por isso difere ligeiramente das definições em ?? e repete os exemplos dessa seção. É também um pouco mais concisa.

Podemos especificar um conjunto finito simplesmente enumerando os seus **membros**. Fazemo-lo quando definimos um conjunto assim:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Supondo que os **membros** $a_1, \dots, a_n$ são todos distintos, obtemos **uma bijeção** entre A e os primeiros n números naturais $0, \dots, n-1$. Reciprocamente, como todo o conjunto finito tem apenas finitos **membros**, todo o conjunto finito pode ser posto nessa correspondência. Em outras palavras, se A é finito, existe **uma bijeção** entre A e $\{0, \dots, n-1\}$, onde n é o número de **membros** de A .

Se admitirmos certos tipos de conjuntos infinitos, admitiremos também que alguns conjuntos infinitos possam ser enumerados. Podemos precisar isto dizendo que um conjunto infinito é enumerado por **uma bijeção** entre ele e todo o $\mathbb{N}$.

Definição siz.1 (Enumeração, no sentido conjuntista). Uma *enumeração* de um conjunto A é **uma bijeção** cujo contradomínio é A e cujo domínio é ou um conjunto inicial de números naturais $\{0, 1, \dots, n\}$ ou todo o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Há uma base intuitiva para este uso da palavra *enumeração*. Dizer que enumeramos um conjunto A é dizer que existe **uma bijeção** f que nos permite *contar* os elementos do conjunto A . O elemento de índice 0 é $f(0)$, o de índice 1 é $f(1)$, ... o de índice n é $f(n)$.¹ O raciocínio fica ainda mais claro com o seguinte:

explanation

sfr:siz:enm-alt:
defn:enumerable

Definição siz.2. Um conjunto A é **enumerável** se e só se $A = \emptyset$ ou existe uma enumeração de A . Dizemos que A é **não enumerável** se e só se A *não* é **enumerável**.

Logo um conjunto é **enumerável** se e só se é vazio ou se podemos usar uma enumeração para contar os seus **membros**.

explanation

Exemplo siz.3. Uma função que enumera os números naturais é simplesmente a função identidade $\text{Id}_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $\text{Id}_{\mathbb{N}}(n) = n$. Uma função que enumera os números naturais *positivos*, $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, é a função $g(n) = n + 1$, isto é, a função sucessora.

¹Sim, contamos a partir de 0. Claro que também poderíamos começar em 1. Não faria grande diferença. Bastaria substituir $\mathbb{N}$ por $\mathbb{Z}^+$.

Problema siz.1. Mostre que um conjunto A é enumerável se e só se $A = \emptyset$ ou existe uma sobrejeção $f: \mathbb{N} \rightarrow A$. Mostre que A é enumerável se e só se existe uma injeção $g: A \rightarrow \mathbb{N}$.

Exemplo siz.4. As funções $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dadas por

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n \text{ e} \\ g(n) &= 2n + 1 \end{aligned}$$

enumeram, respectivamente, os números naturais pares e os ímpares. Mas nenhuma é sobrejetiva, logo nenhuma é uma enumeração de $\mathbb{N}$.

Problema siz.2. Defina uma enumeração dos quadrados perfeitos 1, 4, 9, 16, ...

Exemplo siz.5. Seja $\lceil x \rceil$ a função *teto*, que arredonda x por excesso para o inteiro mais próximo. Então a função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por:

$$f(n) = (-1)^n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

enumera o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$ do seguinte modo:

$$\begin{array}{cccccccc} f(0) & f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & f(5) & f(6) & \dots \\ \left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{4}{2} \right\rceil & -\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil & \left\lceil \frac{6}{2} \right\rceil & \dots \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & \dots \end{array}$$

Repare como f gera os valores de $\mathbb{Z}$ “saltitando” entre inteiros positivos e negativos. Também se pode ver f definida por casos assim:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Problema siz.3. Mostre que se A e B são enumeráveis, então $A \cup B$ também é.

Problema siz.4. Mostre por indução em n que se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são todos enumeráveis, então $A_1 \cup \dots \cup A_n$ também é.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas