

siz.1 Conjuntos de Tamanhos Diferentes e o Teorema de Cantor

sfr:siz:car:
sec Apresentamos uma formulação precisa da ideia de que dois conjuntos têm o mesmo tamanho. Também podemos precisar a ideia de que um conjunto é menor que outro. A nossa definição de “é menor do que (ou equinumeroso)” exigirá, em vez de **uma bijeção** entre os conjuntos, **uma injeção** do primeiro para o segundo. Se tal função existir, o tamanho do primeiro conjunto é menor ou igual ao do segundo. Intuitivamente, **uma injeção** de um conjunto em outro garante que a imagem da função tem pelo menos tantos **membros** quanto o domínio, pois não há dois **membros** do domínio que vão parar ao mesmo **membro** da imagem. explanation

Definição siz.1. *A não é maior do que B*, escrevendo-se $A \preceq B$, sse existir **uma injeção** $f: A \rightarrow B$.

É claro que isto é uma relação reflexiva e transitiva, mas não simétrica (fica como exercício). Podemos ainda introduzir uma noção que diz que um conjunto é (estritamente) menor que outro.

Definição siz.2. *A é menor do que B*, escrevendo-se $A \prec B$, sse existir **uma injeção** $f: A \rightarrow B$ mas não existir **bijeção** $g: A \rightarrow B$, isto é, $A \preceq B$ e $A \not\approx B$.

É claro que esta relação é irreflexiva e transitiva. (Também fica como exercício.) Com esta notação, um conjunto A é **enumerável** sse $A \preceq \mathbb{N}$, e A é **não enumerável** sse $\mathbb{N} \prec A$. Isto permite reformular o ?? como a observação de que $\mathbb{Z}^+ \prec \wp(\mathbb{Z}^+)$. De fato, **Cantor (1892)** provou que este último ponto é *completamente geral*:

sfr:siz:car:
thm:cantor **Teorema siz.3 (Cantor).** $A \prec \wp(A)$, para qualquer conjunto A .

Prova. A aplicação $f(x) = \{x\}$ é **uma injeção** $f: A \rightarrow \wp(A)$, pois se $x \neq y$, então também $\{x\} \neq \{y\}$ por extensionalidade, logo $f(x) \neq f(y)$. Temos pois $A \preceq \wp(A)$.

Apresentamos a prova longa se ?? estiver presente; caso contrário, uma prova mais curta alinhada com a ??.

Resta mostrar que $A \not\approx \wp(A)$. Por *redução ao absurdo*, suponhamos $A \approx \wp(A)$, isto é, que existe alguma **bijeção** $g: A \rightarrow \wp(A)$. Consideremos:

$$D = \{x \in A : x \notin g(x)\}$$

Note-se que $D \subseteq A$, logo $D \in \wp(A)$. Como g é **uma bijeção**, existe algum $y \in A$ tal que $g(y) = D$. Mas então:

$$y \in g(y) \text{ sse } y \in D \text{ sse } y \notin g(y).$$

Isto é uma contradição; logo $A \not\approx \wp(A)$. □

explanation A prova vale também a pena comparar com a do Paradoxo de Russell, ??
De fato, o Teorema de Cantor foi a inspiração para o paradoxo de Russell.

Problema siz.1. Mostre que não pode existir uma injeção $g: \wp(A) \rightarrow A$, para qualquer conjunto A . Sugestão: suponha $g: \wp(A) \rightarrow A$ injetiva. Considere $D = \{g(B) : B \subseteq A \text{ e } g(B) \notin B\}$. Seja $x = g(D)$. Use o fato de g ser injetiva para obter uma contradição.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Cantor, Georg. 1892. Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.
Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1: 75–8.