

set.1 Uniões e Interseções

sfr:set:uni: Na ??, introduzimos definições de conjuntos por abstração, isto é, definições da explanation
sec forma $\{x : \varphi(x)\}$. Aqui invocamos alguma propriedade φ , e essa propriedade pode mencionar conjuntos que já definimos. Assim, por exemplo, se A e B são conjuntos, o conjunto $\{x : x \in A \vee x \in B\}$ consiste em todos aqueles objetos que são **membros** de A ou de B , isto é, é o conjunto que reúne os **membros** de A e B . Podemos visualizar isto como na **Figura 1**, onde a área realçada indica os **membros** dos dois conjuntos A e B juntos.

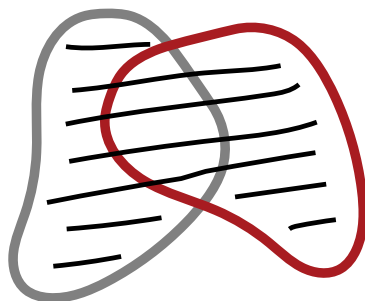


Figura 1: A união $A \cup B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** de A juntamente com os de B .

sfr:set:uni: Esta operação sobre conjuntos—combiná-los—é muito útil e comum, e por
fig:union isso damos-lhe um nome formal e um símbolo.

Definição set.1 (União). A *união* de dois conjuntos A e B , escrita $A \cup B$, é o conjunto de todas as coisas que são **membros** de A , de B , ou de ambos.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Exemplo set.2. Como a multiplicidade de **membros** não importa, a união de dois conjuntos que têm **um membro** em comum contém esse **membro** apenas uma vez, por exemplo, $\{a, b, c\} \cup \{a, 0, 1\} = \{a, b, c, 0, 1\}$.

A união de um conjunto com um dos seus subconjuntos é simplesmente o conjunto maior: $\{a, b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$.

A união de um conjunto com o conjunto vazio é idêntica ao conjunto: $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$.

Problema set.1. Prove que se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$.

Também podemos considerar uma operação “dual” à união. É a operação explanation que forma o conjunto de todos os **membros** que são **membros** de A e são também **membros** de B . Esta operação chama-se *interseção*, e pode representar-se como na **Figura 2**.

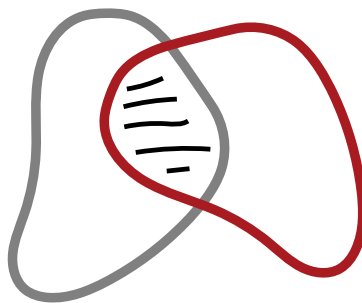


Figura 2: A interseção $A \cap B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** que têm em comum.

Definição set.3 (Interseção). A *interseção* de dois conjuntos A e B , escrita $A \cap B$, é o conjunto de todas as coisas que são **membros** de ambos A e B .

sfr:set:uni:
fig:intersection

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Dois conjuntos dizem-se *disjuntos* se a sua interseção é vazia. Isso significa que não têm **membros** em comum.

Exemplo set.4. Se dois conjuntos não têm **membros** em comum, a sua interseção é vazia: $\{a, b, c\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$.

Se dois conjuntos têm **membros** em comum, a sua interseção é o conjunto de todos esses **membros**: $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\}$.

A interseção de um conjunto com um dos seus subconjuntos é simplesmente o conjunto menor: $\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$.

A interseção de qualquer conjunto com o conjunto vazio é vazia: $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Problema set.2. Prove rigorosamente que se $A \subseteq B$, então $A \cap B = A$.

explanation

Também podemos formar a união ou a interseção de mais de dois conjuntos. Uma forma elegante de tratar disso em geral é a seguinte: suponhamos que reunimos num único conjunto todos os conjuntos dos quais queremos formar a união (ou a interseção). Então podemos definir a união de todos os nossos conjuntos originais como o conjunto de todos os objetos que pertencem a pelo menos um **membro** desse conjunto, e a interseção como o conjunto de todos os objetos que pertencem a todo **membro** desse conjunto.

Definição set.5. Se A é um conjunto de conjuntos, então $\bigcup A$ é o conjunto dos **membros** dos **membros** de A :

$$\begin{aligned} \bigcup A &= \{x : x \text{ pertence a um membro de } A\}, \text{ isto é,} \\ &= \{x : \text{existe um } B \in A \text{ tal que } x \in B\} \end{aligned}$$

Definição set.6. Se A é um conjunto de conjuntos, então $\bigcap A$ é o conjunto dos objetos que todos os elementos de A têm em comum:

$$\begin{aligned}\bigcap A &= \{x : x \text{ pertence a todo membro de } A\}, \text{ isto é,} \\ &= \{x : \text{para todo } B \in A, x \in B\}\end{aligned}$$

Exemplo set.7. Suponha $A = \{\{a, b\}, \{a, d, e\}, \{a, d\}\}$. Então $\bigcup A = \{a, b, d, e\}$ e $\bigcap A = \{a\}$.

Problema set.3. Mostre que se A é um conjunto e $A \in B$, então $A \subseteq \bigcup B$.

Também poderíamos fazer o mesmo para uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \dots$

$$\begin{aligned}\bigcup_i A_i &= \{x : x \text{ pertence a um dos } A_i\} \\ \bigcap_i A_i &= \{x : x \text{ pertence a todos os } A_i\}.\end{aligned}$$

Quando temos um *índice* de conjuntos, isto é, algum conjunto I tal que consideramos A_i para cada $i \in I$, podemos também usar estas abreviaturas:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &= \bigcup \{A_i : i \in I\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \bigcap \{A_i : i \in I\}\end{aligned}$$

Finalmente, podemos querer pensar no conjunto de todos os **membros** em A que não estão em B . Podemos representá-lo como na **Figura 3**.

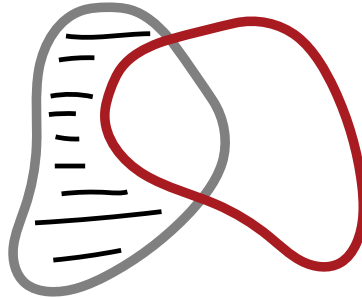


Figura 3: A diferença $A \setminus B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** de A que não são também **membros** de B .

sfr:set:uni:
difference

Definição set.8 (Diferença). A *diferença* de conjuntos $A \setminus B$ é o conjunto de todos os **membros** de A que não são também **membros** de B , isto é,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Problema set.4. Prove que se $A \subsetneq B$, então $B \setminus A \neq \emptyset$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas