

set.1 Subconjuntos e conjuntos potência

sfr:set:sub:
sec

Com frequência queremos comparar conjuntos. É um tipo óbvio de comparação que se pode fazer é o seguinte: *tudo o que está num conjunto está também no outro*. Esta situação é suficientemente importante para introduzirmos nova notação.

explanation

Definição set.1 (Subconjunto). Se todo **membro** de um conjunto A é também **um membro** de B , então dizemos que A é um *subconjunto* de B , e escrevemos $A \subseteq B$. Se A não é subconjunto de B , escrevemos $A \not\subseteq B$. Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, escrevemos $A \subsetneq B$ e dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B .

Exemplo set.2. Todo conjunto é subconjunto de si próprio, e $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto. O conjunto dos números naturais pares é subconjunto do conjunto dos números naturais. Também $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$. Mas $\{a, b, e\}$ não é subconjunto de $\{a, b, c\}$.

Exemplo set.3. O número 2 é um **membro** do conjunto dos inteiros, ao passo que o conjunto dos números pares é subconjunto do conjunto dos inteiros. Contudo, um conjunto pode tanto ser **um membro** quanto subconjunto de algum outro conjunto, por exemplo, $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$ e também $\{0\} \subseteq \{0, \{0\}\}$.

A extensionalidade dá um critério de identidade para conjuntos: $A = B$ se e só se todo **membro** de A é também **um membro** de B e vice-versa. A definição de “subconjunto” define $A \subseteq B$ precisamente como a primeira metade deste critério: todo **membro** de A é também **um membro** de B . Claro que a definição também se aplica se trocarmos A e B : isto é, $B \subseteq A$ se e só se todo **membro** de B é também **um membro** de A . E isso, por sua vez, é exatamente a parte “vice-versa” da extensionalidade. Em outras palavras, a extensionalidade implica que conjuntos são iguais se e só se são subconjuntos um do outro.

Proposição set.4. $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Agora é também boa ocasião para introduzir mais alguma notação útil. Ao definir quando A é subconjunto de B dissemos que “todo **membro** de A é ...”, e preenchamos os “...” com “**um membro** de B ”. Mas esta é uma *forma* tão comum de expressão que convém introduzir notação formal para ela.

sfr:set:sub:
forallxina

Definição set.5. $(\forall x \in A)\varphi$ abrevia $\forall x(x \in A \rightarrow \varphi)$. Do mesmo modo, $(\exists x \in A)\varphi$ abrevia $\exists x(x \in A \wedge \varphi)$.

Com esta notação, podemos dizer que $A \subseteq B$ se e só se $(\forall x \in A)x \in B$.

Passamos agora a considerar um certo tipo de conjunto: o conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto.

Definição set.6 (Conjunto potência). O conjunto constituído por todos os subconjuntos de um conjunto A chama-se o *conjunto potência* de A , e denota-se $\wp(A)$.

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Exemplo set.7. Quais são todos os subconjuntos possíveis de $\{a, b, c\}$? São: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. O conjunto de todos estes subconjuntos é $\wp(\{a, b, c\})$:

$$\wp(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Problema set.1. Liste todos os subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.

Problema set.2. Mostre que se A tem n membros, então $\wp(A)$ tem 2^n membros.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas