

Capítulo udf

Conjuntos

set.1 Extensionalidade

sfr:set:bas:
sec Um *conjunto* é uma coleção de objetos, considerada como um único objeto. Os objetos que compõem o conjunto chamam-se *elementos* ou *membros* do conjunto. Se x é um *membro* de um conjunto A , escrevemos $x \in A$; caso contrário, escrevemos $x \notin A$. O conjunto que não tem *membros* chama-se o *conjunto vazio* e denota-se “ $\emptyset$ ”.

Não importa como *especificamos* o conjunto, ou como *ordenamos* os seus *membros*, ou mesmo quantas *vezes* contamos os seus *membros*. Só importa quais são os seus *membros*. Codificamos isto no princípio seguinte.

Definição set.1 (Extensionalidade). Se A e B são conjuntos, então $A = B$ se e só se todo *membro* de A é também um *membro* de B , e vice-versa.

A extensionalidade autoriza certa notação. Em geral, quando temos objetos $a_1, \dots, a_n$, então $\{a_1, \dots, a_n\}$ é o conjunto cujos *membros* são $a_1, \dots, a_n$. Enfatizamos a palavra “o”, pois a extensionalidade nos diz que só pode haver *um* tal conjunto. De fato, a extensionalidade também autoriza o seguinte:

$$\{a, a, b\} = \{a, b\} = \{b, a\}.$$

Isto traduz a ideia de que, quando consideramos conjuntos, não nos importa a ordem dos seus *membros*, nem quantas vezes são especificados.

Exemplo set.2. Sempre que temos vários objetos, podemos reuni-los num conjunto. O conjunto dos irmãos de Richard, por exemplo, é um conjunto que contém uma pessoa, e podemos escrevê-lo como $S = \{\text{Ruth}\}$. O conjunto dos inteiros positivos menores que 4 é $\{1, 2, 3\}$, mas também se pode escrever como $\{3, 2, 1\}$ ou mesmo como $\{1, 2, 1, 2, 3\}$. São todos o mesmo conjunto, pela extensionalidade. De fato, todo *membro* de $\{1, 2, 3\}$ é também um *membro* de $\{3, 2, 1\}$ (e de $\{1, 2, 1, 2, 3\}$), e vice-versa.

Com frequência especificaremos um conjunto por alguma propriedade que os seus *membros* compartilham. Usaremos a seguinte notação abreviada para

isso: $\{x : \varphi(x)\}$, onde $\varphi(x)$ representa a propriedade que x tem de satisfazer para ser contado entre os **membros** do conjunto.

Exemplo set.3. No nosso exemplo, também poderíamos ter especificado S como

$$S = \{x : x \text{ é irmão de Richard}\}.$$

Exemplo set.4. Diz-se que um número é *perfeito* se e só se for igual à soma dos seus divisores próprios (isto é, números que o dividem sem resto mas não são iguais ao próprio número). Por exemplo, 6 é perfeito porque os seus divisores próprios são 1, 2, e 3, e $6 = 1 + 2 + 3$. De fato, 6 é o único inteiro positivo menor que 10 que é perfeito. Assim, usando a extensionalidade, podemos dizer:

$$\{6\} = \{x : x \text{ é perfeito e } 0 \leq x \leq 10\}$$

Lemos a notação à direita como “o conjunto dos x tais que x é perfeito e $0 \leq x \leq 10$ ”. A identidade aqui confirma que, quando consideramos conjuntos, não nos importa como são especificados. E, mais em geral, a extensionalidade garante que há sempre apenas um conjunto dos x tais que $\varphi(x)$. Logo, a extensionalidade justifica chamar a $\{x : \varphi(x)\}$ o conjunto dos x tais que $\varphi(x)$.

A extensionalidade nos dá um modo de mostrar que conjuntos são idênticos: para mostrar que $A = B$, mostre que sempre que $x \in A$ então também $x \in B$, e sempre que $y \in B$ então também $y \in A$.

Problema set.1. Prove que há no máximo um conjunto vazio, isto é, mostre que se A e B são conjuntos sem **membros**, então $A = B$.

set.2 Subconjuntos e conjuntos potência

explanation

Com frequência quereremos comparar conjuntos. E um tipo óbvio de comparação que se pode fazer é o seguinte: *tudo o que está num conjunto está também no outro*. Esta situação é suficientemente importante para introduzirmos nova notação.

sfr:set:sub:
sec

Definição set.5 (Subconjunto). Se todo **membro** de um conjunto A é também **um membro** de B , então dizemos que A é um *subconjunto* de B , e escrevemos $A \subseteq B$. Se A não é subconjunto de B , escrevemos $A \not\subseteq B$. Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, escrevemos $A \subsetneq B$ e dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B .

Exemplo set.6. Todo conjunto é subconjunto de si próprio, e $\emptyset$ é subconjunto de todo conjunto. O conjunto dos números naturais pares é subconjunto do conjunto dos números naturais. Também $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$. Mas $\{a, b, e\}$ não é subconjunto de $\{a, b, c\}$.

Exemplo set.7. O número 2 é um **membro** do conjunto dos inteiros, ao passo que o conjunto dos números pares é subconjunto do conjunto dos inteiros. Contudo, um conjunto pode tanto ser **um membro** quanto subconjunto de algum outro conjunto, por exemplo, $\{0\} \in \{0, \{0\}\}$ e também $\{0\} \subseteq \{0, \{0\}\}$.

A extensionalidade dá um critério de identidade para conjuntos: $A = B$ se e só se todo **membro** de A é também **um membro** de B e vice-versa. A definição de “subconjunto” define $A \subseteq B$ precisamente como a primeira metade deste critério: todo **membro** de A é também **um membro** de B . Claro que a definição também se aplica se trocarmos A e B : isto é, $B \subseteq A$ se e só se todo **membro** de B é também **um membro** de A . E isso, por sua vez, é exatamente a parte “vice-versa” da extensionalidade. Em outras palavras, a extensionalidade implica que conjuntos são iguais se e só se são subconjuntos um do outro.

Proposição set.8. $A = B$ se e só se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Agora é também boa ocasião para introduzir mais alguma notação útil. Ao definir quando A é subconjunto de B dissemos que “todo **membro** de A é ...,” e preenchemos os “...” com “**um membro** de B ”. Mas esta é uma *forma* tão comum de expressão que convém introduzir notação formal para ela.

Definição set.9. $(\forall x \in A)\varphi$ abrevia $\forall x(x \in A \rightarrow \varphi)$. Do mesmo modo, $(\exists x \in A)\varphi$ abrevia $\exists x(x \in A \wedge \varphi)$.

Com esta notação, podemos dizer que $A \subseteq B$ se e só se $(\forall x \in A)x \in B$.

Passamos agora a considerar um certo tipo de conjunto: o conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto.

Definição set.10 (Conjunto potência). O conjunto constituído por todos os subconjuntos de um conjunto A chama-se o *conjunto potência* de A , e denota-se $\wp(A)$.

$$\wp(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Exemplo set.11. Quais são todos os subconjuntos possíveis de $\{a, b, c\}$? São: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$. O conjunto de todos estes subconjuntos é $\wp(\{a, b, c\})$:

$$\wp(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Problema set.2. Liste todos os subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.

Problema set.3. Mostre que se A tem n **membros**, então $\wp(A)$ tem 2^n **membros**.

set.3 Alguns Conjuntos Importantes

sfr:set:imp:
sec

Exemplo set.12. Trabalharemos sobretudo com conjuntos cujos **membros** são objetos matemáticos. Quatro desses conjuntos são tão importantes que têm

nomes específicos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

o conjunto dos números naturais

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Q} = \{m/n : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0\}$$

o conjunto dos números racionais

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

o conjunto dos números reais (o contínuo)

São todos conjuntos *infinitos*, isto é, cada um tem infinitos **membros**.

À medida que percorremos estes conjuntos, vamos acrescentando *mais* números ao nosso repertório. De fato, deve ficar claro que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: afinal, todo número natural é um inteiro; todo inteiro é racional; e todo racional é real. Igualmente, deve ficar claro que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, pois -1 é inteiro mas não natural, e $1/2$ é racional mas não inteiro. É menos óbvio que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, isto é, que há números reais que não são racionais.

Também usaremos por vezes o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ e o conjunto que contém apenas os dois primeiros naturais $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Exemplo set.13 (Cadeias). Outro exemplo interessante é o conjunto A^* das *cadeias finitas* sobre um alfabeto A : qualquer sequência finita de elementos de A é uma cadeia sobre A . Incluímos a *cadeia vazia* Λ entre as cadeias sobre A , para todo alfabeto A . Por exemplo,

$$\mathbb{B}^* = \{\Lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, 0000, \dots\}.$$

Se $x = x_1 \dots x_n \in A^*$ é uma cadeia constituída por n “letras” de A , então dizemos que o *comprimento* da cadeia é n e escrevemos $\text{len}(x) = n$.

Exemplo set.14 (Sequências infinitas). Para qualquer conjunto A podemos também considerar o conjunto A^ω das sequências infinitas de **membros** de A . Uma sequência infinita $a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ consiste numa lista infinita numa só direção de objetos, cada um dos quais é **um membro** de A .

set.4 Uniões e Interseções

explanation Na **Seção set.1**, introduzimos definições de conjuntos por abstração, isto é, definições da forma $\{x : \varphi(x)\}$. Aqui invocamos alguma propriedade φ , e essa propriedade pode mencionar conjuntos que já definimos. Assim, por exemplo, se A e B são conjuntos, o conjunto $\{x : x \in A \vee x \in B\}$ consiste em todos aqueles objetos que são **membros** de A ou de B , isto é, é o conjunto que reúne sfr:set:uni:sec

os **membros** de A e B . Podemos visualizar isto como na **Figura set.1**, onde a área realçada indica os **membros** dos dois conjuntos A e B juntos.

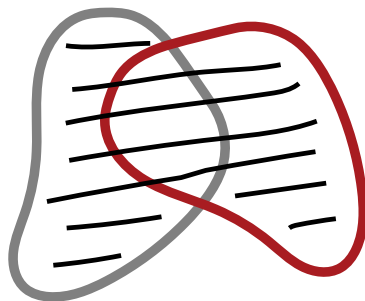


Figura set.1: A união $A \cup B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** de A juntamente com os de B .

sfr:set:uni:
fig:union

Esta operação sobre conjuntos—combiná-los—é muito útil e comum, e por isso damos-lhe um nome formal e um símbolo.

Definição set.15 (União). A *união* de dois conjuntos A e B , escrita $A \cup B$, é o conjunto de todas as coisas que são **membros** de A , de B , ou de ambos.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Exemplo set.16. Como a multiplicidade de **membros** não importa, a união de dois conjuntos que têm **um membro** em comum contém esse **membro** apenas uma vez, por exemplo, $\{a, b, c\} \cup \{a, 0, 1\} = \{a, b, c, 0, 1\}$.

A união de um conjunto com um dos seus subconjuntos é simplesmente o conjunto maior: $\{a, b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}$.

A união de um conjunto com o conjunto vazio é idêntica ao conjunto: $\{a, b, c\} \cup \emptyset = \{a, b, c\}$.

Problema set.4. Prove que se $A \subseteq B$, então $A \cup B = B$.

Também podemos considerar uma operação “dual” à união. É a operação explanation que forma o conjunto de todos os **membros** que são **membros** de A e são também **membros** de B . Esta operação chama-se *interseção*, e pode representar-se como na **Figura set.2**.

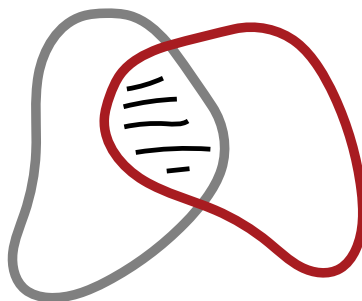


Figura set.2: A interseção $A \cap B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** que têm em comum.

Definição set.17 (Interseção). A *interseção* de dois conjuntos A e B , escrita $A \cap B$, é o conjunto de todas as coisas que são **membros** de ambos A e B .

sfr:set:uni:
fig:intersection

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Dois conjuntos dizem-se *disjuntos* se a sua interseção é vazia. Isso significa que não têm **membros** em comum.

Exemplo set.18. Se dois conjuntos não têm **membros** em comum, a sua interseção é vazia: $\{a, b, c\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$.

Se dois conjuntos têm **membros** em comum, a sua interseção é o conjunto de todos esses **membros**: $\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\}$.

A interseção de um conjunto com um dos seus subconjuntos é simplesmente o conjunto menor: $\{a, b, c\} \cap \{a, b\} = \{a, b\}$.

A interseção de qualquer conjunto com o conjunto vazio é vazia: $\{a, b, c\} \cap \emptyset = \emptyset$.

Problema set.5. Prove rigorosamente que se $A \subseteq B$, então $A \cap B = A$.

explanation

Também podemos formar a união ou a interseção de mais de dois conjuntos. Uma forma elegante de tratar disso em geral é a seguinte: suponhamos que reunimos num único conjunto todos os conjuntos dos quais queremos formar a união (ou a interseção). Então podemos definir a união de todos os nossos conjuntos originais como o conjunto de todos os objetos que pertencem a pelo menos um **membro** desse conjunto, e a interseção como o conjunto de todos os objetos que pertencem a todo **membro** desse conjunto.

Definição set.19. Se A é um conjunto de conjuntos, então $\bigcup A$ é o conjunto dos **membros** dos **membros** de A :

$$\begin{aligned} \bigcup A &= \{x : x \text{ pertence a um membro de } A\}, \text{ isto é,} \\ &= \{x : \text{existe um } B \in A \text{ tal que } x \in B\} \end{aligned}$$

Definição set.20. Se A é um conjunto de conjuntos, então $\bigcap A$ é o conjunto dos objetos que todos os elementos de A têm em comum:

$$\begin{aligned}\bigcap A &= \{x : x \text{ pertence a todo membro de } A\}, \text{ isto é,} \\ &= \{x : \text{para todo } B \in A, x \in B\}\end{aligned}$$

Exemplo set.21. Suponha $A = \{\{a, b\}, \{a, d, e\}, \{a, d\}\}$. Então $\bigcup A = \{a, b, d, e\}$ e $\bigcap A = \{a\}$.

Problema set.6. Mostre que se A é um conjunto e $A \in B$, então $A \subseteq \bigcup B$.

Também poderíamos fazer o mesmo para uma sequência de conjuntos $A_1, A_2, \dots$

$$\begin{aligned}\bigcup_i A_i &= \{x : x \text{ pertence a um dos } A_i\} \\ \bigcap_i A_i &= \{x : x \text{ pertence a todos os } A_i\}.\end{aligned}$$

Quando temos um *índice* de conjuntos, isto é, algum conjunto I tal que consideramos A_i para cada $i \in I$, podemos também usar estas abreviaturas:

$$\begin{aligned}\bigcup_{i \in I} A_i &= \bigcup \{A_i : i \in I\} \\ \bigcap_{i \in I} A_i &= \bigcap \{A_i : i \in I\}\end{aligned}$$

Finalmente, podemos querer pensar no conjunto de todos os **membros** em A que não estão em B . Podemos representá-lo como na **Figura set.3**.

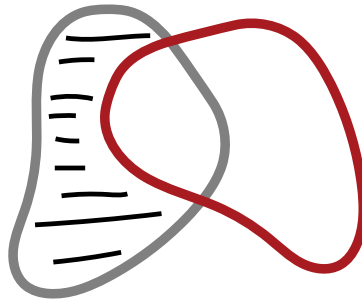


Figura set.3: A diferença $A \setminus B$ de dois conjuntos é o conjunto dos **membros** de A que não são também **membros** de B .

sfr:set:uni:
difference

Definição set.22 (Diferença). A *diferença* de conjuntos $A \setminus B$ é o conjunto de todos os **membros** de A que não são também **membros** de B , isto é,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Problema set.7. Prove que se $A \subsetneq B$, então $B \setminus A \neq \emptyset$.

set.5 Pares, Tuplas, Produtos Cartesianos

explanation Da extensionalidade segue-se que os conjuntos não têm ordem entre os seus elementos. Por isso, se queremos representar ordem, usamos *pares ordenados* $\langle x, y \rangle$. Num par não ordenado $\{x, y\}$, a ordem não importa: $\{x, y\} = \{y, x\}$. Num par ordenado, importa: se $x \neq y$, então $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$. sfr:set:pai:sec

Como devemos pensar os pares ordenados na teoria dos conjuntos? O essencial é preservar a ideia de que pares ordenados são idênticos se e só se compartilham o mesmo primeiro elemento e o mesmo segundo elemento, isto é:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ se e só se } a = c \text{ e } b = d.$$

Podemos definir pares ordenados na teoria dos conjuntos usando a definição de Wiener–Kuratowski.

Definição set.23 (Par ordenado). $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. sfr:set:pai:wienerkuratowski

Problema set.8. Usando **Definição set.23**, prove que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

explanation Tendo fixado uma definição de par ordenado, podemos usá-la para definir outros conjuntos. Por exemplo, por vezes queremos sequências ordenadas de mais de dois objetos, p.ex., *triplos* $\langle x, y, z \rangle$, *quádruplos* $\langle x, y, z, u \rangle$, e assim por diante. Podemos pensar nos triplos como pares ordenados especiais, em que o primeiro elemento é ele próprio um par ordenado: $\langle x, y, z \rangle$ é $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. O mesmo vale para quádruplos: $\langle x, y, z, u \rangle$ é $\langle \langle \langle x, y \rangle, z \rangle, u \rangle$, e assim por diante. Em geral, falamos de *n-tuplas ordenadas* $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Certos conjuntos de pares ordenados, ou outras *n-tuplas ordenadas*, serão úteis.

Definição set.24 (Produto cartesiano). Dados conjuntos A e B , o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é definido por

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo set.25. Se $A = \{0, 1\}$, e $B = \{1, a, b\}$, então o seu produto é

$$A \times B = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}.$$

Exemplo set.26. Se A é um conjunto, o produto de A consigo próprio, $A \times A$, também se escreve A^2 . É o conjunto de *todos* os pares $\langle x, y \rangle$ com $x, y \in A$. O conjunto de todos os triplos $\langle x, y, z \rangle$ é A^3 , e assim por diante. Podemos dar uma definição recursiva:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{k+1} &= A^k \times A \end{aligned}$$

Problema set.9. Liste todos os **membros** de $\{1, 2, 3\}^3$.

sfr:set:pai:
cardnmprod

Proposição set.27. Se A tem n *membros* e B tem m *membros*, então $A \times B$ tem $n \cdot m$ *elementos*.

Prova. Para todo *membro* x em A , há m *membros* da forma $\langle x, y \rangle \in A \times B$. Seja $B_x = \{\langle x, y \rangle : y \in B\}$. Como sempre que $x_1 \neq x_2$, $\langle x_1, y \rangle \neq \langle x_2, y \rangle$, tem-se $B_{x_1} \cap B_{x_2} = \emptyset$. Mas se $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, então $A \times B = B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n}$, e portanto tem $n \cdot m$ *membros*.

Para visualizar isto, dispomos os *membros* de $A \times B$ numa grade:

$$\begin{array}{cccc} B_{x_1} = & \{\langle x_1, y_1 \rangle & \langle x_1, y_2 \rangle & \dots & \langle x_1, y_m \rangle\} \\ B_{x_2} = & \{\langle x_2, y_1 \rangle & \langle x_2, y_2 \rangle & \dots & \langle x_2, y_m \rangle\} \\ & \vdots & & & \vdots \\ B_{x_n} = & \{\langle x_n, y_1 \rangle & \langle x_n, y_2 \rangle & \dots & \langle x_n, y_m \rangle\} \end{array}$$

Como os x_i são todos distintos, e os y_j são todos distintos, quaisquer dois pares nesta grade são distintos, e há $n \cdot m$ deles. $\square$

Problema set.10. Mostre, por indução em k , que para todo $k \geq 1$, se A tem n *membros*, então A^k tem n^k *membros*.

Exemplo set.28. Se A é um conjunto, uma *palavra* sobre A é qualquer sequência de *membros* de A . Uma sequência pode ser vista como uma n -tupla de *membros* de A . Por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$, então a sequência “*bac*” pode ser vista como o triplo $\langle b, a, c \rangle$. Palavras, isto é, sequências de símbolos, são de importância crucial na ciência da computação. Por convenção, contamos os *membros* de A como sequências de comprimento 1, e $\emptyset$ como a sequência de comprimento 0. O conjunto de *todas* as palavras sobre A é então

$$A^* = \{\emptyset\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

set.6 Paradoxo de Russell

sfr:set:rus:
sec

A extensionalidade autoriza a notação $\{x : \varphi(x)\}$, para o conjunto dos x tais que $\varphi(x)$. Contudo, tudo o que a extensionalidade *realmente* autoriza é o seguinte pensamento. Se há um conjunto cujos membros são exatamente os que satisfazem φ , então há apenas um tal conjunto. Dito de outro modo: fixada alguma φ , o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$ é único, se existir.

Mas este condicional é importante! Crucialmente, nem toda propriedade se presta à *compreensão*. Isto é, algumas propriedades *não* definem conjuntos. Se todas definissem, cairíamos em contradições flagrantes. O exemplo mais famoso disso é o Paradoxo de Russell.

Os conjuntos podem ser *membros* de outros conjuntos—por exemplo, o conjunto potência de um conjunto A é constituído por conjuntos. Por isso faz sentido perguntar ou investigar se um conjunto é *um membro* de outro conjunto. Pode um conjunto ser membro de si próprio? Nada na ideia de conjunto parece excluir isso. Por exemplo, se *todos* os conjuntos formam uma coleção de objetos,

alguém poderia pensar que podem reunir-se num único conjunto—o conjunto de todos os conjuntos. E ele, sendo conjunto, seria **um membro** do conjunto de todos os conjuntos.

O Paradoxo de Russell surge quando consideramos a propriedade de não ter a si próprio como **um membro**, de ser *não auto-membro*. E se supusermos que há um conjunto de todos os conjuntos que não têm a si próprios como **um membro**? Será que

$$R = \{x : x \notin x\}$$

existe? Verifica-se que podemos provar que não.

Teorema set.29 (Paradoxo de Russell). *Não há conjunto $R = \{x : x \notin x\}$.* *sfr:set:rus:*
thm:russells-paradox

Prova. Se $R = \{x : x \notin x\}$ existisse, então $R \in R$ se e só se $R \notin R$, o que é uma contradição. $\square$

explanation Vamos percorrer esta prova mais devagar. Se R existe, faz sentido perguntar se $R \in R$ ou não. Suponhamos que de fato $R \in R$. Agora, R foi definido como o conjunto de todos os conjuntos que não são **membros** de si próprios. Logo, se $R \in R$, então R não tem a propriedade definidora de R . Mas só os conjuntos que têm essa propriedade estão em R , logo R não pode ser **um membro** de R , isto é, $R \notin R$. Mas R não pode ao mesmo tempo ser e não ser **um membro** de R , logo temos uma contradição.

Como a suposição de que $R \in R$ leva a uma contradição, temos $R \notin R$. Mas isto também leva a uma contradição! Pois se $R \notin R$, então R tem a propriedade definidora de R , e assim R seria **um membro** de R , tal como todos os outros conjuntos não auto-membros. E de novo, R não pode ao mesmo tempo não ser e ser **um membro** de R .

digression Como montar uma teoria dos conjuntos que evite cair no Paradoxo de Russell, isto é, que evite afirmar de modo *inconsistente* que $R = \{x : x \notin x\}$ existe? Teríamos de estabelecer axiomas que nos dêem condições muito precisas para dizer quando os conjuntos existem (e quando não existem).

A teoria dos conjuntos esboçada neste capítulo não faz isso. É *genuinamente ingênua*. Diz apenas que os conjuntos obedecem à extensionalidade e que, se temos alguns conjuntos, podemos formar a sua união, interseção, etc. É possível desenvolver a teoria dos conjuntos com mais rigor do que isto.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas