

set.1 Paradoxo de Russell

sfr:set:rus:
sec

A extensionalidade autoriza a notação $\{x : \varphi(x)\}$, para o conjunto dos x tais que $\varphi(x)$. Contudo, tudo o que a extensionalidade *realmente* autoriza é o seguinte pensamento. Se há um conjunto cujos membros são exatamente os que satisfazem φ , então há apenas um tal conjunto. Dito de outro modo: fixada alguma φ , o conjunto $\{x : \varphi(x)\}$ é único, se existir.

Mas este condicional é importante! Crucialmente, nem toda propriedade se presta à *compreensão*. Isto é, algumas propriedades *não* definem conjuntos. Se todas definissem, cairíamos em contradições flagrantes. O exemplo mais famoso disso é o Paradoxo de Russell.

Os conjuntos podem ser **membros** de outros conjuntos—por exemplo, o conjunto potência de um conjunto A é constituído por conjuntos. Por isso faz sentido perguntar ou investigar se um conjunto é **um membro** de outro conjunto. Pode um conjunto ser membro de si próprio? Nada na ideia de conjunto parece excluir isso. Por exemplo, se *todos* os conjuntos formam uma coleção de objetos, alguém poderia pensar que podem reunir-se num único conjunto—o conjunto de todos os conjuntos. E ele, sendo conjunto, seria **um membro** do conjunto de todos os conjuntos.

O Paradoxo de Russell surge quando consideramos a propriedade de não ter a si próprio como **um membro**, de ser *não auto-membro*. E se supusermos que há um conjunto de todos os conjuntos que não têm a si próprios como **um membro**? Será que

$$R = \{x : x \notin x\}$$

existe? Verifica-se que podemos provar que não.

sfr:set:rus:
thm:russells-paradox

Teorema set.1 (Paradoxo de Russell). Não há conjunto $R = \{x : x \notin x\}$.

Prova. Se $R = \{x : x \notin x\}$ existisse, então $R \in R$ se e só se $R \notin R$, o que é uma contradição. $\square$

Vamos percorrer esta prova mais devagar. Se R existe, faz sentido perguntar se $R \in R$ ou não. Suponhamos que de fato $R \in R$. Agora, R foi definido como o conjunto de todos os conjuntos que não são **membros** de si próprios. Logo, se $R \in R$, então R não tem a propriedade definidora de R . Mas só os conjuntos que têm essa propriedade estão em R , logo R não pode ser **um membro** de R , isto é, $R \notin R$. Mas R não pode ao mesmo tempo ser e não ser **um membro** de R , logo temos uma contradição.

explanation

Como a suposição de que $R \in R$ leva a uma contradição, temos $R \notin R$. Mas isto também leva a uma contradição! Pois se $R \notin R$, então R tem a propriedade definidora de R , e assim R seria **um membro** de R , tal como todos os outros conjuntos não auto-membros. E de novo, R não pode ao mesmo tempo não ser e ser **um membro** de R .

Como montar uma teoria dos conjuntos que evite cair no Paradoxo de Russell, isto é, que evite afirmar de modo *inconsistente* que $R = \{x : x \notin x\}$ existe?

digression

Teríamos de estabelecer axiomas que nos dêem condições muito precisas para dizer quando os conjuntos existem (e quando não existem).

A teoria dos conjuntos esboçada neste capítulo não faz isso. É *genuinamente ingênua*. Diz apenas que os conjuntos obedecem à extensionalidade e que, se temos alguns conjuntos, podemos formar a sua união, interseção, etc. É possível desenvolver a teoria dos conjuntos com mais rigor do que isto.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas