

set.1 Pares, Tuplas, Produtos Cartesianos

sfr:set:pai: Da extensionalidade segue-se que os conjuntos não têm ordem entre os seus explanation
sec elementos. Por isso, se queremos representar ordem, usamos *pares ordenados* $\langle x, y \rangle$. Num par não ordenado $\{x, y\}$, a ordem não importa: $\{x, y\} = \{y, x\}$. Num par ordenado, importa: se $x \neq y$, então $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$.

Como devemos pensar os pares ordenados na teoria dos conjuntos? O essencial é preservar a ideia de que pares ordenados são idênticos se e só se compartilham o mesmo primeiro elemento e o mesmo segundo elemento, isto é:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \text{ se e só se } a = c \text{ e } b = d.$$

Podemos definir pares ordenados na teoria dos conjuntos usando a definição de Wiener–Kuratowski.

sfr:set:pai: **Definição set.1 (Par ordenado).** $\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
wienerkuratowski

Problema set.1. Usando **Definição set.1**, prove que $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

Tendo fixado uma definição de par ordenado, podemos usá-la para definir explanation outros conjuntos. Por exemplo, por vezes queremos sequências ordenadas de mais de dois objetos, p.ex., *triplos* $\langle x, y, z \rangle$, *quádruplos* $\langle x, y, z, u \rangle$, e assim por diante. Podemos pensar nos triplos como pares ordenados especiais, em que o primeiro elemento é ele próprio um par ordenado: $\langle x, y, z \rangle$ é $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle$. O mesmo vale para quádruplos: $\langle x, y, z, u \rangle$ é $\langle \langle \langle x, y \rangle, z \rangle, u \rangle$, e assim por diante. Em geral, falamos de *n-tuplas ordenadas* $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Certos conjuntos de pares ordenados, ou outras *n-tuplas ordenadas*, serão úteis.

Definição set.2 (Produto cartesiano). Dados conjuntos A e B , o seu *produto cartesiano* $A \times B$ é definido por

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo set.3. Se $A = \{0, 1\}$, e $B = \{1, a, b\}$, então o seu produto é

$$A \times B = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, a \rangle, \langle 0, b \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}.$$

Exemplo set.4. Se A é um conjunto, o produto de A consigo próprio, $A \times A$, também se escreve A^2 . É o conjunto de *todos* os pares $\langle x, y \rangle$ com $x, y \in A$. O conjunto de todos os triplos $\langle x, y, z \rangle$ é A^3 , e assim por diante. Podemos dar uma definição recursiva:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^{k+1} &= A^k \times A \end{aligned}$$

Problema set.2. Liste todos os **membros** de $\{1, 2, 3\}^3$.

Proposição set.5. Se A tem n *membros* e B tem m *membros*, então $A \times B$ sfr:set:pai: cardnmprod tem $n \cdot m$ elementos.

Prova. Para todo *membro* x em A , há m *membros* da forma $\langle x, y \rangle \in A \times B$. Seja $B_x = \{\langle x, y \rangle : y \in B\}$. Como sempre que $x_1 \neq x_2$, $\langle x_1, y \rangle \neq \langle x_2, y \rangle$, tem-se $B_{x_1} \cap B_{x_2} = \emptyset$. Mas se $A = \{x_1, \dots, x_n\}$, então $A \times B = B_{x_1} \cup \dots \cup B_{x_n}$, e portanto tem $n \cdot m$ *membros*.

Para visualizar isto, dispomos os *membros* de $A \times B$ numa grade:

$$\begin{array}{rcl} B_{x_1} & = & \{\langle x_1, y_1 \rangle \quad \langle x_1, y_2 \rangle \quad \dots \quad \langle x_1, y_m \rangle\} \\ B_{x_2} & = & \{\langle x_2, y_1 \rangle \quad \langle x_2, y_2 \rangle \quad \dots \quad \langle x_2, y_m \rangle\} \\ & \vdots & \\ B_{x_n} & = & \{\langle x_n, y_1 \rangle \quad \langle x_n, y_2 \rangle \quad \dots \quad \langle x_n, y_m \rangle\} \end{array}$$

Como os x_i são todos distintos, e os y_j são todos distintos, quaisquer dois pares nesta grade são distintos, e há $n \cdot m$ deles. $\square$

Problema set.3. Mostre, por indução em k , que para todo $k \geq 1$, se A tem n *membros*, então A^k tem n^k *membros*.

Exemplo set.6. Se A é um conjunto, uma *palavra* sobre A é qualquer sequência de *membros* de A . Uma sequência pode ser vista como uma n -tupla de *membros* de A . Por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$, então a sequência “ bac ” pode ser vista como o triplo $\langle b, a, c \rangle$. Palavras, isto é, sequências de símbolos, são de importância crucial na ciência da computação. Por convenção, contamos os *membros* de A como sequências de comprimento 1, e $\emptyset$ como a sequência de comprimento 0. O conjunto de *todas* as palavras sobre A é então

$$A^* = \{\emptyset\} \cup A \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas