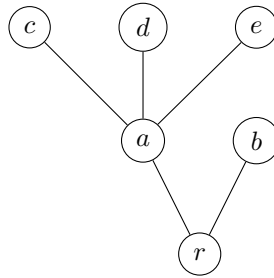


rel.1 Árvores

sfr:rel:tre:
sec

Um tipo particular de ordem parcial que desempenha um papel importante em todas as partes da lógica é uma *árvore*. Árvores finitas aparecem em partes elementares da lógica: por exemplo, *fórmulas* podem ser entendidas em termos de sua decomposição em uma árvore sintática, enquanto *derivações* em muitos sistemas de *derivação* também tomam a forma de árvores finitas. Árvores infinitas aparecem já na prova dos teoremas de completude para a lógica proposicional e de primeira ordem, e são usadas em toda a lógica matemática.

O conceito de árvore da teoria dos conjuntos está intimamente relacionado à noção de árvore na teoria dos grafos. Aqui está uma figura de uma árvore (finita):



O nó mais baixo r é a raiz. Todo nó diferente de r tem exatamente um nó pai imediatamente abaixo dele. Podemos pensar na relação em que um nó x está para um nó y se y pode ser alcançado a partir de x seguindo arestas para cima como x sendo um *ancestral* de y .

A relação de ancestralidade em uma árvore é uma ordem parcial estrita. Isso motiva a definição teórico-conjuntista. Para enunciá-la, precisamos de dois conceitos. Um *menor elemento* em um conjunto A parcialmente ordenado por $\leq$ é um *membro* $x \in A$ tal que para todo $y \in A$ temos que $x \leq y$. Um conjunto é *bem ordenado* por $\leq$ se cada um de seus subconjuntos não vazios tem um menor elemento.

Definição rel.1 (Árvore). Uma *árvore* é um par $T = \langle A, \leq \rangle$ tal que A é um conjunto e $\leq$ é uma ordem parcial em A com um único menor elemento $r \in A$ (chamado de *raiz*) tal que para todo $x \in A$, o conjunto $\{y : y \leq x\}$ é bem ordenado por $\leq$.

Definição rel.2 (Sucessores). Suponha $T = \langle A, \leq \rangle$ é uma árvore. Se $x, y \in A$, $x < y$, e não existe $z \in A$ tal que $x < z < y$, então dizemos que y é um *sucessor* de x .

Os sucessores de $x \in A$ também são chamados de seus *filhos*. Se y é um sucessor de x , então chamamos x de *predecessor* ou *pai* de y .

Proposição rel.3. Se $\langle A, \leq \rangle$ é uma árvore, então todo $x \in A$ diferente da raiz tem no máximo um predecessor.

Prova. Suponha $y_1 < x$ e $y_2 < x$ e $y_1 \neq y_2$. Então $\{y_1, y_2\} \subseteq \{z : z < x\}$. Como $\{z : z < x\}$ é bem ordenado por $\leq$, seu subconjunto $\{y_1, y_2\}$ tem um menor elemento, que obviamente deve ser ou y_1 ou y_2 . Então ou $y_1 \leq y_2$ ou $y_2 \leq y_1$. Supusemos que $y_1 \neq y_2$, então na verdade ou $y_1 < y_2$ ou $y_2 < y_1$. Como supusemos que $y_1 < x$ e $y_2 < x$, temos ainda que ou $y_1 < y_2 < x$ ou $y_2 < y_1 < x$. Então y_1 e y_2 não podem ambos ser predecessores de x . $\square$

Definição rel.4. Uma árvore $T = \langle A, \leq \rangle$ é dita *infinita* se A é um conjunto infinito, e *finita* caso contrário. Se T é tal que todo $x \in A$ tem apenas um número finito de sucessores, então dizemos que T é *finitamente ramificada*.

Definição rel.5 (Ramos). Dada uma árvore $T = \langle A, \leq \rangle$, um *ramo* de T é uma cadeia maximal em T , isto é, um conjunto $B \subseteq A$ tal que para quaisquer $x, y \in B$ ou $x \leq y$ ou $y \leq x$, e para qualquer $z \in X \setminus B$ existe $u \in B$ tal que nem $z \leq u$ nem $u \leq z$. Usamos $[T]$ para denotar o conjunto de todos os ramos de T .

Exemplo rel.6. Um exemplo clássico de árvore finitamente ramificada é a *árvore binária infinita* de seqüências finitas de 0s e 1s, às vezes denotada $\{0, 1\}^*$ ou $\mathbb{B}^*$, ordenada pela relação de extensão $\sqsubseteq$ (p.ex., $101 \sqsubseteq 101101$). Como qualquer cadeia binária pode sempre ser estendida adicionando um 0 ou um 1 no final, esta árvore contém infinitos elementos: todo elemento s tem exatamente dois sucessores, $s0$ e $s1$. Sua raiz é a seqüência vazia Λ .

Exemplo rel.7. De maneira um pouco mais geral, o conjunto de seqüências finitas de números naturais $\mathbb{N}^*$ com a relação de extensão $\sqsubseteq$ também é uma árvore. É obviamente não finitamente ramificada: todo $s \in \mathbb{N}^*$ tem infinitos sucessores sn , um para cada $n \in \mathbb{N}$. Todo $A \subseteq \mathbb{N}^*$ que é fechado sob $\sqsubseteq$ é uma *subárvore* de $\mathbb{N}^*$. (Isto é, A é tal que se $s \in A$ e $s' \sqsubseteq s$, então também $s' \in A$.) Todas as árvores finitas podem ser representadas como subárvores finitas de $\mathbb{N}^*$.

Proposição rel.8 (Lema de König). Se $T = \langle A, \leq \rangle$ é uma árvore infinita finitamente ramificada, então T tem um ramo infinito.

Um caso especial do Lema de König amplamente usado em teoria da computabilidade, conhecido como *Lema Fraco de König*, é o seguinte: qualquer subárvore infinita de $\{0, 1\}^*$ tem um ramo infinito.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas