

rel.1 Relações como Conjuntos

sfr:rel:set:
sec

Na ??, mencionamos alguns conjuntos importantes: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Sem dúvida que se lembram de algumas relações interessantes entre os **membros** de alguns destes conjuntos. Por exemplo, cada um destes conjuntos tem uma *relação de ordem* completamente padrão sobre si. Há também a relação *ser idêntico* a , segundo a qual cada objeto só se relaciona consigo próprio e com nenhum outro. Há muitas outras relações interessantes que encontraremos, e ainda mais relações possíveis. Antes de as revermos, contudo, começaremos por observar que podemos ver relações como um tipo especial de conjunto.

explanation

Para isso, recordemos duas coisas da ??. Primeiro, recordemos a noção de *par ordenado*: dados a e b , podemos formar $\langle a, b \rangle$. É importante notar que a ordem dos elementos *importa* aqui. Assim, se $a \neq b$ então $\langle a, b \rangle \neq \langle b, a \rangle$. (Contrastemos isto com pares não ordenados, isto é, conjuntos de 2 elementos, onde $\{a, b\} = \{b, a\}$.) Segundo, recordemos a noção de *produto cartesiano*: se A e B são conjuntos, então podemos formar $A \times B$, o conjunto de todos os pares $\langle x, y \rangle$ com $x \in A$ e $y \in B$. Em particular, $A^2 = A \times A$ é o conjunto de todos os pares ordenados de A .

Consideremos agora uma relação particular num conjunto: a relação $<$ no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Seja o conjunto de todos os pares de números $\langle n, m \rangle$ onde $n < m$, isto é,

$$R = \{\langle n, m \rangle : n, m \in \mathbb{N} \text{ e } n < m\}.$$

Há uma ligação estreita entre n ser menor que m , e o par $\langle n, m \rangle$ ser membro de R , nomeadamente:

$$n < m \text{ se e só se } \langle n, m \rangle \in R.$$

De fato, sem qualquer perda de informação, podemos considerar o conjunto R como *sendo* a relação $<$ em $\mathbb{N}$.

Do mesmo modo podemos construir um subconjunto de $\mathbb{N}^2$ para qualquer relação entre números. Reciprocamente, dado qualquer conjunto de pares de números $S \subseteq \mathbb{N}^2$, há uma relação correspondente entre números, nomeadamente, a relação segundo a qual n se liga a m se e só se $\langle n, m \rangle \in S$. Isto justifica a definição seguinte:

Definição rel.1 (Relação binária). Uma *relação binária* num conjunto A é um subconjunto de A^2 . Se $R \subseteq A^2$ é uma relação binária em A e $x, y \in A$, por vezes escrevemos Rxy (ou xRy) para $\langle x, y \rangle \in R$.

sfr:rel:set:
relations

Exemplo rel.2. O conjunto $\mathbb{N}^2$ dos pares de números naturais pode ser listado numa matriz bidimensional assim:

$$\begin{array}{ccccc} \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle & \langle 0, 1 \rangle & \langle 0, 2 \rangle & \langle 0, 3 \rangle & \dots \\ \langle 1, 0 \rangle & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle & \langle 1, 2 \rangle & \langle 1, 3 \rangle & \dots \\ \langle 2, 0 \rangle & \langle 2, 1 \rangle & \langle \mathbf{2}, \mathbf{2} \rangle & \langle 2, 3 \rangle & \dots \\ \langle 3, 0 \rangle & \langle 3, 1 \rangle & \langle 3, 2 \rangle & \langle \mathbf{3}, \mathbf{3} \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Colocamos a diagonal, aqui, em **negrito**, pois o subconjunto de $\mathbb{N}^2$ constituído pelos pares que estão na diagonal, isto é,

$$\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \dots\},$$

é a *relação identidade* em $\mathbb{N}$. (Como a relação identidade é popular, definamos $\text{Id}_A = \{\langle x, x \rangle : x \in A\}$ para qualquer conjunto A .) O subconjunto de todos os pares acima da diagonal, isto é,

$$L = \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 0, 2 \rangle, \dots, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \dots, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \dots\},$$

é a relação *menor que*, isto é, Lnm se e só se $n < m$. O subconjunto dos pares abaixo da diagonal, isto é,

$$G = \{\langle 1, 0 \rangle, \langle 2, 0 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 0 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \dots\},$$

é a relação *maior que*, isto é, Gnm se e só se $n > m$. A união de L com I , que podemos chamar $K = L \cup I$, é a relação *menor ou igual a*: Knm se e só se $n \leq m$. Do mesmo modo, $H = G \cup I$ é a *relação maior ou igual a*. Estas relações L , G , K , e H são tipos especiais de relações chamadas *ordens*. L e G gozam da propriedade de que nenhum número está em relação L ou G consigo próprio (isto é, para todo n , não se verifica nem Lnn nem Gnn). Relações com esta propriedade chamam-se *irreflexivas*, e, se também forem ordens, chamam-se *ordens estritas*.

explanation

Embora ordens e identidade sejam relações importantes e naturais, convém enfatizar que, segundo a nossa definição, *qualquer* subconjunto de A^2 é uma relação em A , por mais artificial ou forçado que pareça. Em particular, $\emptyset$ é uma relação em qualquer conjunto (a *relação vazia*, que nenhum par de elementos satisfaz), e A^2 em si é também uma relação em A (uma que todo par de elementos satisfaz), chamada a *relação universal*. Mas também algo como $E = \{\langle n, m \rangle : n > 5 \text{ ou } m \times n \geq 34\}$ conta como relação.

Problema rel.1. Liste os **membros** da relação $\subseteq$ no conjunto $\wp(\{a, b, c\})$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas