

rel.1 Ordens

sfr:rel:ord:sec Muitas das nossas comparações envolvem descrever certos objetos como sendo explanation “menores que”, “iguais a” ou “maiores que” outros objetos, sob algum aspecto. Isso envolve relações de *ordem*. Mas há vários tipos de relação de ordem. Por exemplo, algumas exigem que quaisquer dois objetos sejam comparáveis, outras não. Algumas incluem a identidade (como $\leq$) e outras a excluem (como $<$). Ter aqui uma taxonomia ajuda-nos.

Definição rel.1 (Pré-ordem). Uma relação que é ao mesmo tempo reflexiva e transitiva chama-se uma *pré-ordem*.

Definição rel.2 (Ordem parcial). Uma pré-ordem que também é antissimétrica chama-se uma *ordem parcial*.

sfr:rel:ord:def:linearorder **Definição rel.3 (Ordem linear).** Uma ordem parcial que também é conexa chama-se uma *ordem total* ou *ordem linear*.

Exemplo rel.4. Toda ordem linear é também uma ordem parcial, e toda ordem parcial é também uma pré-ordem, mas as implicações recíprocas não valem. A relação universal sobre A é uma pré-ordem, pois é reflexiva e transitiva. Mas, se A tem mais de um **membro**, a relação universal não é antissimétrica e, portanto, não é uma ordem parcial.

Exemplo rel.5. Considere a relação *não mais longa que* $\preceq$ sobre $\mathbb{B}^*$: $x \preceq y$ sse $\text{len}(x) \leq \text{len}(y)$. Trata-se de uma pré-ordem (reflexiva e transitiva), e até conexa, mas não é uma ordem parcial, pois não é antissimétrica. Por exemplo, $01 \preceq 10$ e $10 \preceq 01$, mas $01 \neq 10$.

Exemplo rel.6. Uma ordem parcial importante é a relação $\subseteq$ sobre um conjunto de conjuntos. Em geral não é uma ordem linear: se $a \neq b$ e consideramos $\wp(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, vemos que $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ e $\{a\} \neq \{b\}$ e $\{b\} \not\subseteq \{a\}$.

Exemplo rel.7. A relação de *divisibilidade sem resto* nos dá uma ordem parcial que não é linear. Para inteiros n e m , escrevemos $n \mid m$ para significar que n divide m (exatamente), isto é, sse existe algum inteiro k tal que $m = kn$. Sobre $\mathbb{N}$, isso é uma ordem parcial, mas não linear: por exemplo, $2 \nmid 3$ e também $3 \nmid 2$. Vista como relação sobre $\mathbb{Z}$, a divisibilidade é apenas uma pré-ordem, pois não é antissimétrica: $1 \mid -1$ e $-1 \mid 1$ mas $1 \neq -1$.

Exemplo rel.8. A relação de *extensão* sobre um conjunto de sequências A^* é a seguinte: $s \sqsubseteq s'$ sse $s = \Lambda$ (a sequência vazia), $s = s'$, ou $s = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ e $s' = \langle s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_m \rangle$. Se $s \sqsubseteq s'$ dizemos também que s é um *segmento inicial* de s' . A relação de extensão sobre A^* é uma ordem parcial, mas não linear, p.ex., se $a \neq b$, então $ab \not\sqsubseteq ba$ e $ba \not\sqsubseteq ab$.

Definição rel.9 (Ordem estrita). Uma *ordem estrita* é uma relação irreflexiva, assimétrica e transitiva.

Definição rel.10 (Ordem linear estrita). Uma ordem estrita que também é conexa chama-se *ordem total estrita* ou *ordem linear estrita*.

[sfr:rel:ord:](#)
[def:strictlinearorder](#)

Exemplo rel.11. $\leq$ é a ordem linear correspondente à ordem linear estrita $<$.
 $\subseteq$ é a ordem parcial correspondente à ordem estrita $\subsetneq$.

Qualquer ordem estrita R sobre A pode transformar-se numa ordem parcial adicionando a diagonal Id_A , isto é, adicionando todos os pares $\langle x, x \rangle$. (Isto chama-se o *fecho reflexivo* de R .) Reciprocamente, a partir de uma ordem parcial obtém-se uma ordem estrita removendo Id_A . Os dois resultados seguintes tornam isto preciso.

Proposição rel.12. Se R é uma ordem estrita sobre A , então $R^+ = R \cup \text{Id}_A$ é uma ordem parcial. Além disso, se R é uma ordem linear estrita, então R^+ é uma ordem linear.

[sfr:rel:ord:](#)
[prop:stricttopartial](#)

Prova. Suponhamos que R é uma ordem estrita, isto é, $R \subseteq A^2$ e R é irreflexiva, assimétrica e transitiva. Seja $R^+ = R \cup \text{Id}_A$. Temos de mostrar que R^+ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

R^+ é claramente reflexiva, pois $\langle x, x \rangle \in \text{Id}_A \subseteq R^+$ para todo $x \in A$.

Para mostrar que R^+ é antissimétrica, suponhamos, para redução ao absurdo, que R^+xy e R^+yx mas $x \neq y$. Como $\langle x, y \rangle \in R \cup \text{Id}_A$, mas $\langle x, y \rangle \notin \text{Id}_A$, temos de ter $\langle x, y \rangle \in R$, isto é, Rxy . Do mesmo modo, Ryx . Mas isto contradiz a hipótese de que R é assimétrica.

Para estabelecer a transitividade, suponhamos que R^+xy e R^+yz . Se tanto $\langle x, y \rangle \in R$ como $\langle y, z \rangle \in R$, então $\langle x, z \rangle \in R$, pois R é transitiva. Caso contrário, ou $\langle x, y \rangle \in \text{Id}_A$, isto é, $x = y$, ou $\langle y, z \rangle \in \text{Id}_A$, isto é, $y = z$. No primeiro caso, temos R^+yz por hipótese, $x = y$, logo R^+xz . Analogamente no segundo caso. Em qualquer caso, R^+xz ; assim, R^+ é também transitiva.

Quanto à cláusula “além disso”, suponhamos que R é também conexa. Então, para todo $x \neq y$, ou Rxy ou Ryx , isto é, ou $\langle x, y \rangle \in R$ ou $\langle y, x \rangle \in R$. Como $R \subseteq R^+$, isto continua a valer para R^+ , logo R^+ é também conexa. $\square$

Proposição rel.13. Se R é uma ordem parcial sobre A , então $R^- = R \setminus \text{Id}_A$ é uma ordem estrita. Além disso, se R é uma ordem linear, então R^- é uma ordem linear estrita.

[sfr:rel:ord:](#)
[prop:partialtostrict](#)

Prova. Deixamos como exercício. $\square$

Problema rel.1. Apresente uma prova da **Proposição rel.13**.

O resultado simples a seguir estabelece que ordens lineares estritas satisfazem uma propriedade no estilo da extensionalidade:

Proposição rel.14. Se $<$ é uma ordem linear estrita sobre A , então:

[sfr:rel:ord:](#)
[prop:extensionality-strictlinearorder](#)

$$(\forall a, b \in A)((\forall x \in A)(x < a \leftrightarrow x < b) \rightarrow a = b).$$

Prova. Suponhamos $(\forall x \in A)(x < a \leftrightarrow x < b)$. Se $a < b$, então $a < a$, o que contradiz o fato de $<$ ser irreflexiva; logo $a \not< b$. De forma totalmente análoga, $b \not< a$. Logo $a = b$, pois $<$ é conexa. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas