

rel.1 Relações de Equivalência

sfr:rel:eqv:
sec A relação identidade num conjunto é reflexiva, simétrica e transitiva. Relações R que têm todas as três destas propriedades são muito comuns.

Definição rel.1 (Relação de equivalência). Uma relação $R \subseteq A^2$ que é reflexiva, simétrica e transitiva chama-se uma *relação de equivalência*. **Membros** x e y de A dizem-se *R -equivalentes* se Rxy .

As relações de equivalência dão origem à noção de *classe de equivalência*. Uma relação de equivalência “reparte” o domínio em partições distintas. Dentro de cada partição, todos os objetos estão relacionados uns com os outros; e objetos de partições diferentes não se relacionam entre si. Por vezes, é útil falar destas partições *diretamente*. Para esse fim, introduzimos uma definição:

sfr:rel:eqv:
def:equivalenceclass **Definição rel.2.** Seja $R \subseteq A^2$ uma relação de equivalência. Para cada $x \in A$, a *classe de equivalência* de x em A é o conjunto $[x]_R = \{y \in A : Rxy\}$. O *quociente* de A por R é $A/R = \{[x]_R : x \in A\}$, isto é, o conjunto destas classes de equivalência.

O resultado seguinte justifica a definição de classe de equivalência, provando que as classes de equivalência são de fato as partições de A :

Proposição rel.3. Se $R \subseteq A^2$ é uma relação de equivalência, então Rxy se e só se $[x]_R = [y]_R$.

Prova. Para o sentido da esquerda para a direita, suponhamos Rxy , e seja $z \in [x]_R$. Por definição, então, Rxz . Como R é uma relação de equivalência, Ryz . (Explicando melhor: como Rxy e R é simétrica temos Ryx , e como Rxz e R é transitiva temos Ryz .) Logo $z \in [y]_R$. Generalizando, $[x]_R \subseteq [y]_R$. Mas de modo perfeitamente análogo, $[y]_R \subseteq [x]_R$. Logo $[x]_R = [y]_R$, pela extensionalidade.

Para o sentido da direita para a esquerda, suponhamos $[x]_R = [y]_R$. Como R é reflexiva, Ryy , logo $y \in [y]_R$. Assim também $y \in [x]_R$ pela suposição de que $[x]_R = [y]_R$. Logo Rxy . $\square$

Exemplo rel.4. Um bom exemplo de relações de equivalência vem da aritmética modular. Para quaisquer a, b , e $n \in \mathbb{Z}^+$, digamos que $a \equiv_n b$ se e só se dividir a por n dá o mesmo resto que dividir b por n . (De modo um pouco mais simbólico: $a \equiv_n b$ se e só se, para algum $k \in \mathbb{Z}$, $a - b = kn$.) Agora, $\equiv_n$ é uma relação de equivalência, para qualquer n . E há exatamente n classes de equivalência distintas geradas por $\equiv_n$; isto é, $\mathbb{N}/\equiv_n$ tem n **membros**. São: o conjunto dos números divisíveis por n sem resto, isto é, $[0]_{\equiv_n}$; o conjunto dos números divisíveis por n com resto 1, isto é, $[1]_{\equiv_n}$; ...; e o conjunto dos números divisíveis por n com resto $n - 1$, isto é, $[n - 1]_{\equiv_n}$.

Problema rel.1. Mostre que $\equiv_n$ é uma relação de equivalência, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, e que $\mathbb{N}/\equiv_n$ tem exatamente n membros.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas