

Capítulo udf

Conjuntos Infinitos

Este capítulo sobre conjuntos infinitos foi retirado de *Open Set Theory*, de Tim Button.

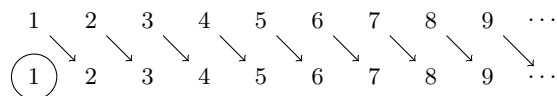
infinite.1 Hotel de Hilbert

sfr:infinite:hilbert:
sec

O conjunto dos números naturais é obviamente infinito. Logo, se não quisermos *valer-nos* dos números naturais, o nosso primeiro passo é caracterizar um conjunto infinito em termos que não exijam mencionar os próprios números naturais. Eis uma abordagem agradável, apresentada por Hilbert numa conferência de 1924. Ele nos pede que imaginemos

[...] um hotel com um número finito de quartos. Todos esses quartos devem estar ocupados por exatamente um hóspede. Se os hóspedes trocam de quarto de algum modo, [mas] de tal forma que cada quarto continua a conter no máximo uma pessoa, então nenhum quarto ficará livre, e o dono do hotel não pode, deste modo, criar um novo lugar para um hóspede que acaba de chegar [... ¶ ...]

Agora estipulamos que o hotel tem infinitos quartos numerados 1, 2, 3, 4, 5, ..., cada um ocupado por exatamente um hóspede. Logo que chega um novo hóspede, o dono só precisa de mudar cada um dos hóspedes antigos para o quarto associado ao número imediatamente superior, e o quarto 1 ficará livre para o recém-chegado.



(publicado em Hilbert 2013, 730; a nossa tradução)

O ponto crucial é que o Hotel de Hilbert tem infinitos quartos; e podemos tomar a sua explicação como definição do que significa dizer isto. De fato, foi esta a abordagem de Dedekind (apresentada aqui, claro, com enorme anacronismo; a definição de Dedekind é de 1888):

Definição infinite.1. Um conjunto A é *infinito de Dedekind* sse existe uma injeção sfr:infinite:hilbert: defn:DedekindInfinite de A para um subconjunto próprio de A . Isto é, existe algum $o \in A$ e uma injeção $f: A \rightarrow A$ tal que $o \notin \text{Im}(f)$.

infinite.2 Álgebras de Dedekind

Não queremos apenas que os números naturais sejam infinitos; queremos que tenham certas propriedades (algébricas): precisam de comportar-se bem sob adição, multiplicação, e assim por diante. sfr:infinite:dedekind: sec

A ideia de Dedekind foi tomar como primitiva a noção de *função sucessor* e depois caracterizar os números como aqueles que têm as seguintes propriedades:

1. Existe um número, 0, que não é sucessor de nenhum número
isto é, $0 \notin \text{Im}(s)$
isto é, $\forall x \ s(x) \neq 0$
2. Números distintos têm sucessores distintos
isto é, s é uma injeção
isto é, $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$
3. Todo o número se obtém de 0 por aplicações repetidas da função sucessor. sfr:infinite:dedekind: repeatedapplication

As duas primeiras condições são fáceis de lidar com, usando lógica de primeira ordem (ver acima). Mas não podemos tratar (3) apenas com lógica de primeira ordem. O avanço de Dedekind foi reformular a condição (3), em termos de teoria dos conjuntos, assim:

- 3'. Os números naturais são o menor conjunto que é *fechado para a função sucessor*: isto é, se aplicarmos s a qualquer membro do conjunto, obtemos outro membro do conjunto.

Mas precisamos de explicitar isto com calma.

Definição infinite.2. Para qualquer função f , o conjunto X é *f -fechado* sse sfr:infinite:dedekind: Closure $(\forall x \in X) f(x) \in X$. Definimos agora, para qualquer o :

$$\text{clo}_f(o) = \bigcap \{X : o \in X \text{ e } X \text{ é } f\text{-fechado}\}$$

Logo $\text{clo}_f(o)$ é a interseção de todos os conjuntos f -fechados que têm o como um membro. Intuitivamente, então, $\text{clo}_f(o)$ é o conjunto f -fechado *menor* que tem o como um membro. O resultado seguinte torna preciso esse pensamento intuitivo;

Lema infinite.3. Para qualquer função f e qualquer $o \in A$:

sfr:infinite:dedekind: closureproperties

sfr::infinite:dedekind:
closurehaselem

1. $o \in \text{clo}_f(o)$; e

sfr::infinite:dedekind:
closureclosed

2. $\text{clo}_f(o)$ é f -fechado; e

sfr::infinite:dedekind:
closuresmallest

3. se X é f -fechado e $o \in X$, então $\text{clo}_f(o) \subseteq X$

Prova. Note-se que existe pelo menos um conjunto f -fechado com o como um membro, nomeadamente $\text{Im}(f) \cup \{o\}$. Logo $\text{clo}_f(o)$, a interseção de todos os tais conjuntos, existe. Cumpre agora verificar (1)–(3).

Quanto a (1): $o \in \text{clo}_f(o)$ pois é uma interseção de conjuntos que todos têm o como um membro.

Quanto a (2): suponhamos $x \in \text{clo}_f(o)$. Se $o \in X$ e X é f -fechado, então $x \in X$, e agora $f(x) \in X$ pois X é f -fechado. Logo $f(x) \in \text{clo}_f(o)$.

Quanto a (3): de modo geral, se $X \in C$ então $\bigcap C \subseteq X$. □

Com isto, podemos dizer:

Definição infinite.4. Uma *álgebra de Dedekind* é um conjunto A juntamente com uma função $f: A \rightarrow A$ e algum $o \in A$ tal que:

sfr::infinite:dedekind:
ded:proper

1. $o \notin \text{Im}(f)$

sfr::infinite:dedekind:
ded:injection

2. f é uma injeção

sfr::infinite:dedekind:
ded:closure

3. $A = \text{clo}_f(o)$

Como $A = \text{clo}_f(o)$, o resultado anterior nos diz que A é o menor conjunto f -fechado com o como um membro. Claramente uma álgebra de Dedekind é infinita de Dedekind; basta olhar para as cláusulas (1) e (2) da definição. Mas o fato mais relevante é que qualquer conjunto infinito de Dedekind pode ser transformado numa álgebra de Dedekind.

sfr::infinite:dedekind:
thm:DedekindInfiniteAlgebra

Teorema infinite.5. Se existe um conjunto infinito de Dedekind, então existe uma álgebra de Dedekind.

Prova. Seja D infinito de Dedekind. Logo existe uma injeção $g: D \rightarrow D$ e um elemento $o \in D \setminus \text{Im}(g)$. Seja agora $A = \text{clo}_g(o)$; por Lema infinite.3, A existe e $o \in A$. Seja $f = g|_A$. Mostraremos que A, f, o formam uma álgebra de Dedekind.

Quanto a (1): $o \notin \text{Im}(g)$ e $\text{Im}(f) \subseteq \text{Im}(g)$, logo $o \notin \text{Im}(f)$.

Quanto a (2): g é injetiva em D ; logo $f \subseteq g$ tem de ser injetiva.

Quanto a (3): por Lema infinite.3, A é g -fechado; *a fortiori*, A é f -fechado. Logo $\text{clo}_f(o) \subseteq A$ por Lema infinite.3. Como também $\text{clo}_f(o)$ é f -fechado e $f = g|_A$, segue-se que $\text{clo}_f(o)$ é g -fechado. Logo $A \subseteq \text{clo}_f(o)$ por Lema infinite.3. □

infinite.3 Álgebras de Dedekind e Indução Aritmética

Crucialmente, agora, uma álgebra de Dedekind—de fato, *qualquer* álgebra de Dedekind—servirá como substituto dos números naturais. Isto deve-se à seguinte consequência trivial:

sfr:infinite:induction:
sec

Teorema infinite.6 (Indução aritmética). *Sejam N, s, o uma álgebra de Dedekind. Então, para qualquer conjunto X :*

sfr:infinite:induction:
thm:dedinfiniteinduction

$$\text{se } o \in X \text{ e } (\forall n \in N \cap X) s(n) \in X, \text{ então } N \subseteq X.$$

Prova. Pela definição de álgebra de Dedekind, $N = \text{clo}_s(o)$. Ora, se tanto $o \in X$ como $(\forall n \in N)(n \in X \rightarrow s(n) \in X)$, então $N = \text{clo}_s(o) \subseteq X$. $\square$

Como a indução é característica dos números naturais, o ponto é este. Dado qualquer conjunto infinito de Dedekind, podemos formar uma álgebra de Dedekind e usar essa álgebra como substituto dos números naturais.

Admitidamente, **Teorema infinite.6** formula a indução em termos *de teoria dos conjuntos*. Mas podemos facilmente pôr o princípio em termos mais familiares:

Corolário infinite.7. *Sejam N, s, o uma álgebra de Dedekind. Então, para qualquer fórmula $\varphi(x)$, que pode ter parâmetros:*

sfr:infinite:induction:
natinductionschema

$$\text{se } \varphi(o) \text{ e } (\forall n \in N)(\varphi(n) \rightarrow \varphi(s(n))), \text{ então } (\forall n \in N)\varphi(n)$$

Prova. Seja $X = \{n \in N : \varphi(n)\}$, e use-se agora **Teorema infinite.6** $\square$

Neste resultado, falamos de uma fórmula “ter parâmetros”. O que isto significa, em traços grosseiros, é que, para quaisquer objetos $c_1, \dots, c_k$, podemos trabalhar com $\varphi(x, c_1, \dots, c_k)$. Com mais precisão, podemos enunciar o resultado sem mencionar “parâmetros” do seguinte modo. Para qualquer fórmula $\varphi(x, v_1, \dots, v_k)$, cujas variáveis livres são todas as exibidas, temos:

$$\begin{aligned} \forall v_1 \dots \forall v_k ((\varphi(o, v_1, \dots, v_k) \wedge \\ (\forall x \in N)(\varphi(x, v_1, \dots, v_k) \rightarrow \varphi(s(x), v_1, \dots, v_k))) \rightarrow \\ (\forall x \in N)\varphi(x, v_1, \dots, v_k)) \end{aligned}$$

Evidentemente, falar em “ter parâmetros” pode tornar a leitura muito mais fácil. (Na ??, usaremos este expediente com frequência.)

Voltando às álgebras de Dedekind: dada qualquer álgebra de Dedekind, podemos também definir as habituais funções aritméticas de adição, multiplicação e exponenciação. Isto não é trivial, porém, e envolve a técnica de *definição recursiva*. É uma técnica que introduziremos e justificaremos muito mais tarde, e num contexto bem mais geral. (Os entusiastas podem querer voltar a isto depois de ??, ou talvez ler um tratamento alternativo, como **Potter**

2004, pp. 95–8.) Mas, onde N, s, o formam uma álgebra de Dedekind, acabaremos por poder estipular o seguinte:

$$\begin{array}{lll} a + o = a & a \times o = o & a^o = s(o) \\ a + s(b) = s(a + b) & a \times s(b) = (a \times b) + a & a^{s(b)} = a^b \times a \end{array}$$

e mostrar que estas definições se comportam como se espera.

infinite.4 “Prova” de Dedekind da existência de um conjunto infinito

sfr:infinite:dedekindsproof:
sec

Neste capítulo, apresentamos um tratamento em teoria dos conjuntos dos números naturais, em termos de álgebras de Dedekind. Em ??, refletimos sobre o significado filosófico da aritmetização da análise (entre outras coisas). Cumpre agora refletir sobre o significado do que aqui alcançamos.

Ao longo de ??, tomamos os números naturais como dados e os usamos para construir os inteiros, os racionais e os reais, de modo explícito. Neste capítulo, não demos uma construção explícita dos números naturais. Mostramos apenas que, *dado qualquer conjunto infinito de Dedekind*, podemos definir um conjunto que se comportará como queremos que $\mathbb{N}$ se comporte.

Obviamente, pois, não podemos pretender ter respondido a uma questão metafísica, como *quais os objetos que são os números naturais*. Mas isso é bom. Afinal, na ??, sublinhamos que estaríamos errados se pensássemos na definição de $\mathbb{R}$ como conjunto de cortes de Dedekind como uma *descoberta*, em vez de uma estipulação conveniente. A observação crucial é que os cortes de Dedekind exemplificam as propriedades matemáticas centrais dos números reais. Assim também aqui: a observação crucial é que *qualquer* álgebra de Dedekind exemplifica as propriedades matemáticas centrais dos números naturais. (De fato, Dedekind insistiu neste ponto ao provar que todas as álgebras de Dedekind são *isomorfas* (1888, Theorems 132–3). Não surpreende, então, que muitos “estruturalistas” contemporâneos cite Dedekind como precursor.)

Além disso, mostramos como embutir a teoria dos números naturais numa teoria ingênua simples dos conjuntos, que ainda permanece bastante informal, mas que (aparentemente) não assume os números naturais como dados. Assim, podemos estar no caminho de realizar o próprio projeto ambicioso de Dedekind, que ele explicou assim:

Na ciência nada que seja provável deve ser acreditado sem prova. Embora esta exigência pareça razoável, não posso considerá-la satisfeita sequer nos métodos mais recentes de lançar os fundamentos da ciência mais simples; a saber, aquela parte da lógica que trata da teoria dos números. Ao falar de aritmética (álgebra, análise) como mera parte da lógica, quero insinuar que considero o conceito de número totalmente independente das noções ou intuições de espaço e tempo—que o considero antes um produto imediato das leis puras do pensamento. (Dedekind, 1888, preface)

A ideia audaciosa de Dedekind é esta. Acabamos de mostrar como construir os números naturais usando só (ingenuamente) a teoria dos conjuntos. Em ??, vimos como construir os reais dados os números naturais e alguma teoria dos conjuntos. Logo, talvez, “a aritmética (álgebra, análise)” acabe por ser “meramente parte da lógica” (no sentido alargado que Dedekind dá à palavra “lógica”).

Essa é a ideia. Mas esperemos um momento. A nossa construção de uma álgebra de Dedekind (o nosso substituto dos números naturais) é condicional à existência de um conjunto infinito de Dedekind. (Basta olhar para trás, para [Teorema infinite.5](#).) A menos que a existência de um conjunto infinito de Dedekind possa ser estabelecida via “lógica” ou “as leis puras do pensamento”, o projeto estagna.

Então, *pode* a existência de um conjunto infinito de Dedekind ser estabelecida pelas “leis puras do pensamento”? Eis o esforço de Dedekind:

O meu próprio reino de pensamentos, isto é, a totalidade S de todas as coisas que podem ser objetos do meu pensamento, é infinita. Pois, se s designa um elemento de S , então o pensamento s' de que s pode ser objeto do meu pensamento é ele próprio um elemento de S . Se considerarmos isto como uma imagem $\varphi(s)$ do elemento s , então ... S é infinito de Dedekind, como queríamos ter provado. ([Dedekind, 1888](#), §66)

Isto é algo de espantoso de encontrar no meio de um livro que em grande parte consiste em provas matemáticas altamente rigorosas. Duas observações valem a pena.

Primeiro: esta “prova” mal tem o que hoje reconheceríamos como caráter “matemático”. Fala de objetos psicológicos (pensamentos), e apenas de objetos *possíveis*.

Segundo: pelo menos tal como apresentamos as álgebras de Dedekind, esta “prova” tem uma lacuna técnica direta. Se o argumento de Dedekind é bem-sucedido, estabelece só que há infinitas coisas (nomeadamente, infinitos pensamentos). Mas Dedekind também precisa de nos dar uma razão para ver S como um único *conjunto*, com infinitos *membros*, em vez de pensar em S como *algumas coisas* (no plural).

O fato de Dedekind não ver aqui uma lacuna pode sugerir que o seu uso da palavra “totalidade” não corresponde exatamente ao *nosso* uso da palavra “conjunto”.¹ Mas isto não seria demasiado surpreendente. O projeto que perseguimos nos últimos dois capítulos—uma “construção” dos naturais e, a partir deles, uma “construção” dos inteiros, reais e racionais—foi todo ele feito de modo ingênuo. Nos apoiamos neste conjunto, ou naquele conjunto, sempre que precisamos, sem enunciar muitos princípios gerais sobre exatamente que conjuntos existem, e quando. Mas sabemos que precisamos de *alguns* princípios gerais, pois caso contrário caímos no Paradoxo de Russell.

Chegou a hora de superarmos a nossa ingenuidade.

¹De fato, temos outras razões para pensar que não correspondia; ver [Potter \(2004, p. 23\)](#).

infinite.5 Apêndice: Provando Schröder-Bernstein

sfr:infinite:card-sb:
sec

Antes de deixarmos a teoria ingênua dos conjuntos, há ainda uma última prova ingênua (mas sofisticada!) a considerar. Trata-se de uma prova de Schröder-Bernstein (??): se $A \preceq B$ e $B \preceq A$ então $A \approx B$; isto é, dados **injeções** $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$, existe **uma bijeção** $h: A \rightarrow B$.

Neste capítulo, seguimos a noção dedekindiana de *fechos*. De fato, Dedekind deu uma prova muito elegante de Schröder-Bernstein com esta noção, e aqui a apresentamos. A prova segue de perto **Potter (2004, pp. 157–8)**, se quiser um tratamento ligeiramente diferente mas essencialmente semelhante. Uma breve pesquisa na Internet também convencerá o leitor de que este é um teorema—tal como a irracionalidade de $\sqrt{2}$ —para o qual existem *muitas* provas interessantes e distintas.

Usando notação semelhante à de **Definição infinite.2**, seja

$$\text{Clo}_f(B) = \bigcap \{X : B \subseteq X \text{ e } X \text{ é } f\text{-fechado}\}$$

para cada conjunto B e função f . Assim definido, $\text{Clo}_f(B)$ é o menor conjunto f -fechado que contém B , no sentido de que:

sfr:infinite:card-sb:
Closureprops

Lema infinite.8. *Para qualquer função f , e qualquer B :*

sfr:infinite:card-sb:
Closurehaselem

1. $B \subseteq \text{Clo}_f(B)$; e

sfr:infinite:card-sb:
Closureclosed

2. $\text{Clo}_f(B)$ é f -fechado; e

sfr:infinite:card-sb:
Closuresmallest

3. se X é f -fechado e $B \subseteq X$, então $\text{Clo}_f(B) \subseteq X$.

Prova. Exatamente como no **Lema infinite.3**. □

Precisamos de mais um fato para chegar a Schröder-Bernstein:

sfr:infinite:card-sb:
sbhelper

Proposição infinite.9. *Se $A \subseteq B \subseteq C$ e $A \approx C$, então $A \approx B \approx C$.*

Prova. Dada **uma bijeção** $f: C \rightarrow A$, seja $F = \text{Clo}_f(C \setminus B)$ e defina-se uma função g com domínio C do seguinte modo:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in F \\ x & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostraremos que g é **uma bijeção** de C para B , donde seguirá que $g \circ f^{-1}: A \rightarrow B$ é **uma bijeção**, completando a prova.

Primeiro alegamos que, se $x \in F$ mas $y \notin F$, então $g(x) \neq g(y)$. Por reductio, suponhamos o contrário, de modo que $y = g(y) = g(x) = f(x)$. Como $x \in F$ e F é f -fechado por **Lema infinite.8**, temos $y = f(x) \in F$, contradição.

Suponhamos agora $g(x) = g(y)$. Então, pelo que precede, $x \in F$ sse $y \in F$. Se $x, y \in F$, então $f(x) = g(x) = g(y) = f(y)$, logo $x = y$ pois f é **uma bijeção**. Se $x, y \notin F$, então $x = g(x) = g(y) = y$. Logo g é **uma injeção**.

Resta mostrar que $\text{Im}(g) = B$. Fixemos $x \in B \subseteq C$. Se $x \notin F$, então $g(x) = x$. Se $x \in F$, então $x = f(y)$ para algum $y \in F$, pois caso contrário $F \setminus \{x\}$ seria f -fechado e estenderia $C \setminus B$, o que é impossível por **Lema infinite.8**; agora $g(y) = f(y) = x$. $\square$

Finalmente, eis a prova do resultado principal. Recordemos que, dada uma função h e um conjunto D , definimos $h[D] = \{h(x) : x \in D\}$.

Prova de Schröder-Bernstein. Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow A$ **injeções**. Como $f[A] \subseteq B$, temos $g[f[A]] \subseteq g[B] \subseteq A$. Além disso, $g \circ f: A \rightarrow g[f[A]]$ é **uma injeção**, pois tanto g como f o são; e de fato $g \circ f$ é **uma bijeção**, apenas pela forma como definimos o seu contradomínio. Logo $g[f[A]] \approx A$, e portanto, por **Proposição infinite.9**, existe **uma bijeção** $h: A \rightarrow g[B]$. Além disso, g^{-1} é **uma bijeção** $g[B] \rightarrow B$. Logo $g^{-1} \circ h: A \rightarrow B$ é **uma bijeção**. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Hilbert, David. 2013. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, eds. William Bragg Ewald and Wilfried Sieg. Heidelberg: Springer.

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.