

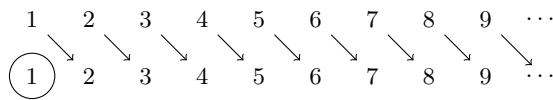
infinite.1 Hotel de Hilbert

sfr:infinite:hilbert:
sec

O conjunto dos números naturais é obviamente infinito. Logo, se não quisermos *valer-nos* dos números naturais, o nosso primeiro passo é caracterizar um conjunto infinito em termos que não exijam mencionar os próprios números naturais. Eis uma abordagem agradável, apresentada por Hilbert numa conferência de 1924. Ele nos pede que imaginemos

[...] um hotel com um número finito de quartos. Todos esses quartos devem estar ocupados por exatamente um hóspede. Se os hóspedes trocam de quarto de algum modo, [mas] de tal forma que cada quarto continua a conter no máximo uma pessoa, então nenhum quarto ficará livre, e o dono do hotel não pode, deste modo, criar um novo lugar para um hóspede que acaba de chegar [...]

Agora estipulamos que o hotel tem infinitos quartos numerados 1, 2, 3, 4, 5, ..., cada um ocupado por exatamente um hóspede. Logo que chega um novo hóspede, o dono só precisa de mudar cada um dos hóspedes antigos para o quarto associado ao número imediatamente superior, e o quarto 1 ficará livre para o recém-chegado.



(publicado em Hilbert 2013, 730; a nossa tradução)

O ponto crucial é que o Hotel de Hilbert tem infinitos quartos; e podemos tomar a sua explicação como definição do que significa dizer isto. De fato, foi esta a abordagem de Dedekind (apresentada aqui, claro, com enorme anacronismo; a definição de Dedekind é de 1888):

sfr:infinite:hilbert:
def:DedekindInfinite

Definição infinite.1. Um conjunto A é *infinito de Dedekind* sse existe uma injeção de A para um subconjunto próprio de A . Isto é, existe algum $o \in A$ e uma injeção $f: A \rightarrow A$ tal que $o \notin \text{Im}(f)$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

Hilbert, David. 2013. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917–1933*, eds. William Bragg Ewald and Wilfried Sieg. Heidelberg: Springer.