

infinite.1 “Prova” de Dedekind da existência de um conjunto infinito

sfr:infinite:dedekindsproof:
sec

Neste capítulo, apresentamos um tratamento em teoria dos conjuntos dos números naturais, em termos de álgebras de Dedekind. Em ??, refletimos sobre o significado filosófico da aritmetização da análise (entre outras coisas). Cumpre agora refletir sobre o significado do que aqui alcançamos.

Ao longo de ??, tomamos os números naturais como dados e os usamos para construir os inteiros, os racionais e os reais, de modo explícito. Neste capítulo, não demos uma construção explícita dos números naturais. Mostramos apenas que, *dado qualquer conjunto infinito de Dedekind*, podemos definir um conjunto que se comportará como queremos que $\mathbb{N}$ se comporte.

Obviamente, pois, não podemos pretender ter respondido a uma questão metafísica, como *quais os objetos que são os números naturais*. Mas isso é bom. Afinal, na ??, sublinhamos que estaríamos errados se pensássemos na definição de $\mathbb{R}$ como conjunto de cortes de Dedekind como uma *descoberta*, em vez de uma estipulação conveniente. A observação crucial é que os cortes de Dedekind exemplificam as propriedades matemáticas centrais dos números reais. Assim também aqui: a observação crucial é que *qualquer* álgebra de Dedekind exemplifica as propriedades matemáticas centrais dos números naturais. (De fato, Dedekind insistiu neste ponto ao provar que todas as álgebras de Dedekind são *isomorfas* (1888, Theorems 132–3). Não surpreende, então, que muitos “estruturalistas” contemporâneos cite Dedekind como precursor.)

Além disso, mostramos como embutir a teoria dos números naturais numa teoria ingênua simples dos conjuntos, que ainda permanece bastante informal, mas que (aparentemente) não assume os números naturais como dados. Assim, podemos estar no caminho de realizar o próprio projeto ambicioso de Dedekind, que ele explicou assim:

Na ciência nada que seja provável deve ser acreditado sem prova. Embora esta exigência pareça razoável, não posso considerá-la satisfeita sequer nos métodos mais recentes de lançar os fundamentos da ciência mais simples; a saber, aquela parte da lógica que trata da teoria dos números. Ao falar de aritmética (álgebra, análise) como mera parte da lógica, quero insinuar que considero o conceito de número totalmente independente das noções ou intuições de espaço e tempo—que o considero antes um produto imediato das leis puras do pensamento. (Dedekind, 1888, preface)

A ideia audaciosa de Dedekind é esta. Acabamos de mostrar como construir os números naturais usando só (ingenuamente) a teoria dos conjuntos. Em ??, vimos como construir os reais dados os números naturais e alguma teoria dos conjuntos. Logo, talvez, “a aritmética (álgebra, análise)” acabe por ser “meramente parte da lógica” (no sentido alargado que Dedekind dá à palavra “lógica”).

Essa é a ideia. Mas esperemos um momento. A nossa construção de uma álgebra de Dedekind (o nosso substituto dos números naturais) é condicional

à existência de um conjunto infinito de Dedekind. (Basta olhar para trás, para ??.) A menos que a existência de um conjunto infinito de Dedekind possa ser estabelecida via “lógica” ou “as leis puras do pensamento”, o projeto estagna.

Então, *pode* a existência de um conjunto infinito de Dedekind ser estabelecida pelas “leis puras do pensamento”? Eis o esforço de Dedekind:

O meu próprio reino de pensamentos, isto é, a totalidade S de todas as coisas que podem ser objetos do meu pensamento, é infinita. Pois, se s designa um elemento de S , então o pensamento s' de que s pode ser objeto do meu pensamento é ele próprio um elemento de S . Se considerarmos isto como uma imagem $\varphi(s)$ do elemento s , então ... S é infinito de Dedekind, como queríamos ter provado. (Dedekind, 1888, §66)

Isto é algo de espantoso de encontrar no meio de um livro que em grande parte consiste em provas matemáticas altamente rigorosas. Duas observações valem a pena.

Primeiro: esta “prova” mal tem o que hoje reconheceríamos como caráter “matemático”. Fala de objetos psicológicos (pensamentos), e apenas de objetos *possíveis*.

Segundo: pelo menos tal como apresentamos as álgebras de Dedekind, esta “prova” tem uma lacuna técnica direta. Se o argumento de Dedekind é bem-sucedido, estabelece só que há infinitas coisas (nomeadamente, infinitos pensamentos). Mas Dedekind também precisa de nos dar uma razão para ver S como um único *conjunto*, com infinitos *membros*, em vez de pensar em S como *algumas coisas* (no plural).

O fato de Dedekind não ver aqui uma lacuna pode sugerir que o seu uso da palavra “totalidade” não corresponde exatamente ao *nosso* uso da palavra “conjunto”.¹ Mas isto não seria demasiado surpreendente. O projeto que perseguimos nos últimos dois capítulos—uma “construção” dos naturais e, a partir deles, uma “construção” dos inteiros, reais e racionais—foi todo ele feito de modo ingênuo. Nos apoiamos neste conjunto, ou naquele conjunto, sempre que precisamos, sem enunciar muitos princípios gerais sobre exatamente que conjuntos existem, e quando. Mas sabemos que precisamos de *alguns* princípios gerais, pois caso contrário caímos no Paradoxo de Russell.

Chegou a hora de superarmos a nossa ingenuidade.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Dedekind, Richard. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg.

¹De fato, temos outras razões para pensar que não correspondia; ver Potter (2004, p. 23).

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.