

fun.1 Funções Parciais

Às vezes é útil relaxar a definição de função de modo que não seja exigido que a saída da função esteja definida para todas as entradas possíveis. Tais mapeamentos são chamados de *funções parciais*. sfr:fun:par: sec explanation

Definição fun.1. Uma *função parcial* $f: A \rightarrow B$ é um mapeamento que associa a cada **membro** de A no máximo um **membro** de B . Se f associa um **membro** de B a $x \in A$, dizemos que $f(x)$ está *definido*, e caso contrário *indefinido*. Se $f(x)$ está definido, escrevemos $f(x) \downarrow$, caso contrário $f(x) \uparrow$. O *domínio* de uma função parcial f é o subconjunto de A onde ela está definida, isto é, $\text{dom}(f) = \{x \in A : f(x) \downarrow\}$.

Exemplo fun.2. Toda função $f: A \rightarrow B$ é também uma função parcial. Funções parciais que estão definidas em todo A —isto é, o que até agora chamávamos simplesmente de função—também são chamadas de funções *totais*.

Exemplo fun.3. A função parcial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é indefinida para $x = 0$ e definida em todo o restante.

Problema fun.1. Dada $f: A \rightarrow B$, defina a função parcial $g: B \rightarrow A$ por: para qualquer $y \in B$, se existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$, então $g(y) = x$; caso contrário $g(y) \uparrow$. Mostre que se f é injetiva, então $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \text{dom}(f)$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \text{Im}(f)$.

Definição fun.4 (Gráfico de uma função parcial). Seja $f: A \rightarrow B$ uma função parcial. O *gráfico* de f é a relação $R_f \subseteq A \times B$ definida por

$$R_f = \{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}.$$

Proposição fun.5. Suponha que $R \subseteq A \times B$ tem a propriedade de que sempre que Rxy e Rxy' então $y = y'$. Então R é o gráfico da função parcial $f: A \rightarrow B$ definida por: se existe um y tal que Rxy , então $f(x) = y$, caso contrário $f(x) \uparrow$. Se R também é serial, isto é, para cada $x \in A$ existe um $y \in B$ tal que Rxy , então f é total.

Prova. Suponha que existe um y tal que Rxy . Se existisse outro $y' \neq y$ tal que Rxy' , a condição sobre R seria violada. Portanto, se existe um y tal que Rxy , esse y é único, e assim f é bem definida. Obviamente, $R_f = R$ e f é total se R é serial. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas