

fun.1 Inversas de Funções

sfr:fun:inv: sec Pensamos nas funções como mapas. Uma pergunta natural sobre funções é, explanation pois, se o mapeamento pode ser “invertido”. Por exemplo, a função sucessora $f(x) = x + 1$ pode ser invertida, no sentido em que a função $g(y) = y - 1$ “desfaz” o que f faz.

Mas é preciso ter cuidado. Embora a definição de g defina uma função $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, não define uma *função* $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pois $g(0) \notin \mathbb{N}$. Assim, mesmo em casos simples, não é óbvio que uma função possa ser invertida; pode depender do domínio e do contradomínio.

Isto torna-se mais preciso com a noção de inversa de uma função.

Definição fun.1. Uma função $g: B \rightarrow A$ é uma *inversa* de uma função $f: A \rightarrow B$ se $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Se f tem uma inversa g , escrevemos muitas vezes f^{-1} em vez de g .

Agora determinaremos quando as funções têm inversas. Um bom candidato explanation a inversa de $f: A \rightarrow B$ é $g: B \rightarrow A$ “definida por”

$$g(y) = \text{“o” } x \text{ tal que } f(x) = y.$$

Mas as aspas em “definida por” (e em “o”) sugerem que isto não é uma definição. Pelo menos, nem sempre funcionará com total generalidade. Pois, para que esta definição especifique uma função, tem de haver um e apenas um x tal que $f(x) = y$ —a saída de g tem de ficar unicamente determinada. Além disso, tem de estar especificada para todo $y \in B$. Se existirem x_1 e $x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(y)$ não ficaria unicamente determinada para $y = f(x_1) = f(x_2)$. E se não existir x algum tal que $f(x) = y$, então $g(y)$ nem sequer fica especificada. Em outras palavras, para g estar definida, f tem de ser tanto *injetiva* quanto *sobrejetiva*.

Vamos com calma. Dividiremos a questão em duas: dada uma função $f: A \rightarrow B$, quando existe uma função $g: B \rightarrow A$ tal que $g(f(x)) = x$? Tal g “desfaz” o que f faz, e chama-se *inversa à esquerda* de f . Em segundo lugar, quando existe uma função $h: B \rightarrow A$ tal que $f(h(y)) = y$? Tal h chama-se *inversa à direita* de f —“desfaz” o que h faz.

Proposição fun.2. Se $f: A \rightarrow B$ é *injetiva*, então existe uma inversa à esquerda $g: B \rightarrow A$ de f tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.

Prova. Suponhamos que $f: A \rightarrow B$ é *injetiva*. Consideremos $y \in B$. Se $y \in \text{Im}(f)$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é *injetiva*, há apenas um tal $x \in A$. Então podemos definir: $g(y) = x$, isto é, $g(y)$ é “o” $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Se $y \notin \text{Im}(f)$, podemos mapeá-lo para qualquer $a \in A$. Assim, podemos escolher $a \in A$ e definir $g: B \rightarrow A$ por:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{se } f(x) = y \\ a & \text{se } y \notin \text{Im}(f). \end{cases}$$

Está definida para todo $y \in B$, pois para cada tal $y \in \text{Im}(f)$ há exatamente um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por definição, se $y = f(x)$, então $g(y) = x$, isto é, $g(f(x)) = x$. $\square$

Problema fun.1. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à esquerda g , então f é **injetiva**.

Proposição fun.3. Se $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva**, então existe uma inversa à direita $h: B \rightarrow A$ de f tal que $f(h(y)) = y$ para todo $y \in B$.

Prova. Suponhamos que $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva**. Consideremos $y \in B$. Como f é **sobrejetiva**, existe $x_y \in A$ com $f(x_y) = y$. Então podemos definir: $h(y) = x_y$, isto é, para cada $y \in B$ escolhemos algum $x \in A$ tal que $f(x) = y$; como f é **sobrejetiva** há sempre pelo menos um de onde escolher.¹ Por definição, se $x = h(y)$, então $f(x) = y$, isto é, para todo $y \in B$, $f(h(y)) = y$. $\square$

Problema fun.2. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à direita h , então f é **sobrejetiva**.

explanation Combinando as ideias da prova anterior, obtemos agora que toda **bijeção** tem uma inversa, isto é, existe uma única função que é tanto inversa à esquerda quanto à direita de f .

Proposição fun.4. Se $f: A \rightarrow B$ é **bijetiva**, existe uma função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$ e, para todo $y \in B$, $f(f^{-1}(y)) = y$. *sfr:fun:inv:*
prop:bijection-inverse

Prova. Exercício. $\square$

Problema fun.3. Prove **Proposição fun.4**. Tem de definir f^{-1} , mostrar que é uma função, e mostrar que é uma inversa de f , isto é, $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

explanation Há uma forma ligeiramente mais geral de extrair inversas. Vimos na ?? que toda função f induz uma **sobrejeção** $f': A \rightarrow \text{Im}(f)$ pondo $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Claramente, se f é **injetiva**, então f' é **bijetiva**, logo tem uma inversa única pela **Proposição fun.4**. Por um pequeno abuso de notação, chamamos por vezes à inversa de f' simplesmente “a inversa de f .”

Proposição fun.5. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à esquerda g e uma inversa à direita h , então $h = g$. *sfr:fun:inv:*
prop:left-right

¹Como f é **sobrejetiva**, para todo $y \in B$ o conjunto $\{x : f(x) = y\}$ é não vazio. A nossa definição de h exige que escolhamos um único x em cada um destes conjuntos. Que isto seja sempre possível não é de todo óbvio—a possibilidade de fazer estas escolhas é simplesmente assumida como axioma. Em outras palavras, esta proposição pressupõe o chamado Axioma da Escolha, questão a que aqui não damos destaque. Contudo, em muitos casos concretos, p.ex., quando $A = \mathbb{N}$ ou é finito, ou quando f é **bijetiva**, o Axioma da Escolha não é necessário. (No caso em que f é **bijetiva**, para cada $y \in B$ o conjunto $\{x : f(x) = y\}$ tem exatamente um **membro**, logo não há escolha a fazer.)

Prova. Exercício.

□

Problema fun.4. Prove **Proposição fun.5**.

*sfr:fun:inv:
prop:inverse-unique*

Proposição fun.6. *Toda função f tem no máximo uma inversa.*

Prova. Suponhamos que g e h são ambas inversas de f . Então, em particular, g é uma inversa à esquerda de f e h é uma inversa à direita. Pela **Proposição fun.5**, $g = h$.

□

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas