

Capítulo udf

Funções

fun.1 Noções Básicas

sfr:fun:bas:
sec

Uma *função* é um mapa que envia cada **membro** de um dado conjunto para um **membro** específico em algum (outro) conjunto dado. Por exemplo, a operação de somar 1 define uma função: cada número n é mapeado para um único número $n + 1$.

explanation

Mais em geral, funções podem tomar pares, triplos, etc., como entradas e devolver algum tipo de saída. Muitas funções nos são familiares da aritmética básica. Por exemplo, a adição e a multiplicação são funções. Tomam dois números e devolvem um terceiro.

Neste sentido matemático e abstrato, uma função é uma *caixa preta*: só importa que saída fica associada a que entrada, não o método de calcular a saída.

Definição fun.1 (Função). Uma *função* $f: A \rightarrow B$ é um mapeamento de cada **membro** de A para um **membro** de B .

Chamamos A de *domínio* de f e B de *contradomínio* de f . Os **membros** de A chamam-se entradas ou *argumentos* de f , e o **membro** de B que fica associado a um argumento x por f chama-se o *valor de f* para o argumento x , escrevendo-se $f(x)$.

A *imagem* $\text{Im}(f)$ de f é o subconjunto do contradomínio constituído pelos valores de f para algum argumento; $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}$.

O diagrama na **Figura fun.1** pode ajudar a pensar em funções. A elipse à esquerda representa o *domínio* da função; a elipse à direita representa o *contradomínio*; e uma seta aponta de um *argumento* no domínio para o *valor* correspondente no contradomínio.

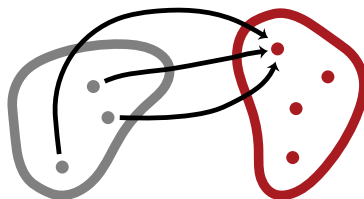


Figura fun.1: Uma função é um mapeamento de cada **membro** de um conjunto para **um membro** de outro. Uma seta vai de um argumento no domínio para o valor correspondente no contradomínio.

Exemplo fun.2. A multiplicação toma pares de números naturais como entradas e mapeia-os para números naturais como saídas, logo vai de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (o domínio) para $\mathbb{N}$ (o contradomínio). Como se vê, a imagem é também $\mathbb{N}$, pois todo $n \in \mathbb{N}$ é $n \times 1$.

sfr:fun:bas:
fig:function

Exemplo fun.3. A multiplicação é uma função porque associa cada entrada—cada par de números naturais—a uma única saída: $\times: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Em contraste, mapear um número natural n para um real x tal que $x^2 = n$ não é funcional, pois cada inteiro positivo n tem duas raízes quadradas: $\sqrt{n}$ e $-\sqrt{n}$. Podemos torná-la funcional devolvendo só a raiz quadrada positiva: $\sqrt{\cdot}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo fun.4. A relação que associa cada aluno de uma turma à sua nota final é uma função—nenhum aluno pode ter duas notas finais diferentes na mesma turma. A relação que associa cada aluno de uma turma aos seus progenitores não é uma função: os alunos podem ter zero, ou dois, ou mais progenitores.

explanation

Podemos definir funções especificando de modo preciso qual é o valor da função para cada argumento possível. Formas de o fazer são dar uma fórmula, descrever um método para calcular o valor, ou listar os valores para cada argumento. Como quer que as funções sejam definidas, temos de garantir que, para cada argumento, especificamos um, e apenas um, valor.

Exemplo fun.5. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Esta é uma definição que especifica f como uma função que toma números naturais e devolve números naturais. Diz-nos que, dado um número natural x , f devolverá o seu sucessor $x + 1$. Neste caso, o contradomínio $\mathbb{N}$ não é a imagem de f , pois o número natural 0 não é sucessor de nenhum número natural. A imagem de f é o conjunto de todos os inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$.

Exemplo fun.6. Seja $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2 - 1$. Isto nos diz que g é uma função que toma números naturais e devolve números naturais. Dado um número natural n , g devolverá o predecessor do sucessor do sucessor de n , isto é, $n + 1$.

sfr:fun:bas:
examplefunext

Acabamos de considerar duas funções, f e g , com *definições* diferentes. explanation Contudo, são a *mesma função*. Afinal, para qualquer número natural n , temos $f(n) = n + 1 = n + 2 - 1 = g(n)$. Em outras palavras: as nossas definições de f e g especificam o mesmo mapeamento por meio de equações diferentes. Implicitamente, pois, estamos nos apoiando num princípio de extensionalidade para funções,

$$\text{se } \forall x f(x) = g(x), \text{ então } f = g$$

desde que f e g compartilhem o mesmo domínio e contradomínio.

Exemplo fun.7. Também podemos definir funções por casos. Por exemplo, poderíamos definir $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Como todo número natural é par ou ímpar, a saída desta função será sempre um número natural. Basta lembrar que, se se define uma função por casos, cada entrada possível tem de cair em exatamente um caso. Em alguns casos, isto exigirá uma prova de que os casos são exaustivos e exclusivos.

fun.2 Tipos de Funções

sfr:fun:kin: sec Será útil introduzir uma espécie de taxonomia para alguns dos tipos de funções explanation que encontramos com mais frequência.

Para começar, podemos querer considerar funções com a propriedade de que todo *membro* do contradomínio é um valor da função. Tais funções chamam-se *sobrejetivas*, e podem ser esquematizadas como na **Figura fun.2**.

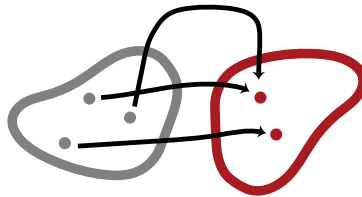


Figura fun.2: Uma função *sobrejetiva* tem todo *membro* do contradomínio como valor.

sfr:fun:kin: fig:surjective

Definição fun.8 (Função *Sobrejetiva*). Uma função $f: A \rightarrow B$ é *sobrejetiva* se e só se B é também a imagem de f , isto é, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou em símbolos:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)f(x) = y.$$

Chamamos a tal função *uma sobrejeção* de A para B .

explanation Se quiser mostrar que f é uma **sobrejeção**, tem de mostrar que todo objeto no contradomínio de f é o valor de $f(x)$ para alguma entrada x .

Note-se que qualquer função *induz* uma **sobrejeção**. Afinal, dada uma função $f: A \rightarrow B$, seja $f': A \rightarrow \text{Im}(f)$ definida por $f'(x) = f(x)$. Como $\text{Im}(f)$ é *definida* como $\{f(x) \in B : x \in A\}$, esta função f' é garantidamente uma **sobrejeção**.

explanation Agora, qualquer função mapeia cada entrada possível para uma única saída. Mas há também funções que nunca mapeiam entradas diferentes para a mesma saída. Tais funções chamam-se **injetivas**, e podem ser esquematizadas como na **Figura fun.3**.



Figura fun.3: Uma função **injetiva** nunca mapeia dois argumentos diferentes para o mesmo valor.

Definição fun.9 (Função Injetiva). Uma função $f: A \rightarrow B$ é **injetiva** se e só se, para cada $y \in B$, há no máximo um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Chamamos a tal função uma **injeção** de A para B .

sfr:fun:kin:
fig:injective

explanation Se quiser mostrar que f é uma **injeção**, tem de mostrar que, para quaisquer **membros** x e y do domínio de f , se $f(x) = f(y)$, então $x = y$.

Exemplo fun.10. A função constante $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 1$ não é nem **injetiva**, nem **sobrejetiva**.

A função identidade $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$ é tanto **injetiva** quanto **sobrejetiva**.

A função sucessora $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$ é **injetiva** mas não **sobrejetiva**.

A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

é **sobrejetiva**, mas não **injetiva**.

explanation Muitas vezes, queremos considerar funções que são tanto **injetivas** como **sobrejetivas**. Chamamos a tais funções **bijetivas**. Parecem-se com a função esquematizada na **Figura fun.4**. **Bijeções** são também por vezes chamadas *correspondências biunívocas*, pois associam de modo único elementos do contradomínio a elementos do domínio.

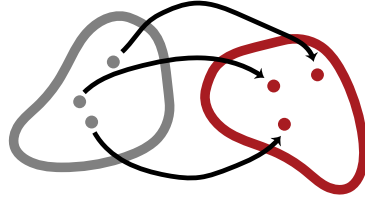


Figura fun.4: Uma função **bijetiva** associa de modo único os elementos do contradomínio aos do domínio.

sfr:fun:kin:
fig:bijjective

Definição fun.11 (Bijeção). Uma função $f: A \rightarrow B$ é **bijetiva** se e só se é tanto **sobrejetiva** como **injetiva**. Chamamos a tal função uma **bijeção** de A para B (ou entre A e B).

fun.3 Funções como Relações

sfr:fun:rel:
sec

Uma função que mapeia **membros** de A para **membros** de B define obviamente uma relação entre A e B , nomeadamente a relação que se verifica entre x e y se e só se $f(x) = y$. De fato, podemos até—se nos interessa reduzir os blocos de construção da matemática, por exemplo—*identificar* a função f com esta relação, isto é, com um conjunto de pares. Isto levanta então a questão: que relações definem funções deste modo?

explanation

Definição fun.12 (Gráfico de uma função). Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. O *gráfico* de f é a relação $R_f \subseteq A \times B$ definida por

$$R_f = \{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}.$$

O gráfico de uma função fica unicamente determinado, pela extensionalidade. Além disso, a extensionalidade (sobre conjuntos) justifica de imediato o princípio implícito de extensionalidade para funções, segundo o qual, se f e g compartilham domínio e contradomínio, então são idênticas se coincidem em todos os valores.

explanation

Do mesmo modo, se uma relação é “funcional”, então é o gráfico de uma função.

sfr:fun:rel:
prop:graph-function

Proposição fun.13. *Seja $R \subseteq A \times B$ tal que:*

1. *Se Rxy e Rxz , então $y = z$; e*
2. *para todo $x \in A$ existe algum $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in R$.*

Então R é o gráfico da função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = y$ se e só se Rxy .

Prova. Suponhamos que existe y tal que Rxy . Se existisse outro $z \neq y$ tal que Rxz , a condição sobre R seria violada. Logo, se existe y tal que Rxy , esse y é único, e assim f está bem definida. Obviamente, $R_f = R$. $\square$

explanation Toda função $f: A \rightarrow B$ tem um gráfico, isto é, uma relação em $A \times B$ definida por $f(x) = y$. Por outro lado, toda relação $R \subseteq A \times B$ com as propriedades dadas na **Proposição fun.13** é o gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$. Por causa desta ligação estreita entre funções e os seus gráficos, podemos pensar numa função simplesmente como o seu gráfico. Em outras palavras, funções podem identificar-se com certas relações, isto é, com certos conjuntos de tuplos. Podemos agora considerar fazer operações semelhantes sobre funções às que fizemos sobre relações (ver ??). Em particular:

Definição fun.14. Seja $f: A \rightarrow B$ uma função com $C \subseteq A$.

A *restrição* de f a C é a função $f|_C: C \rightarrow B$ definida por $(f|_C)(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. Em outras palavras, $f|_C = \{\langle x, y \rangle \in R_f : x \in C\}$.

A *aplicação* de f a C é $f[C] = \{f(x) : x \in C\}$. Chamamos-lhe também a *imagem* de C por f .

sfr:fun:rel:
defn:funimage

explanation Segue-se destas definições que $\text{Im}(f) = f[\text{dom}(f)]$, para qualquer função f .

fun.4 Inversas de Funções

explanation Pensamos nas funções como mapas. Uma pergunta natural sobre funções é, pois, se o mapeamento pode ser “invertido”. Por exemplo, a função sucessora $f(x) = x + 1$ pode ser invertida, no sentido em que a função $g(y) = y - 1$ “desfaz” o que f faz.

sfr:fun:inv:
sec

Mas é preciso ter cuidado. Embora a definição de g defina uma função $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, não define uma *função* $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pois $g(0) \notin \mathbb{N}$. Assim, mesmo em casos simples, não é óbvio que uma função possa ser invertida; pode depender do domínio e do contradomínio.

Isto torna-se mais preciso com a noção de inversa de uma função.

Definição fun.15. Uma função $g: B \rightarrow A$ é uma *inversa* de uma função $f: A \rightarrow B$ se $f(g(y)) = y$ e $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Se f tem uma inversa g , escrevemos muitas vezes f^{-1} em vez de g .

explanation Agora determinaremos quando as funções têm inversas. Um bom candidato a inversa de $f: A \rightarrow B$ é $g: B \rightarrow A$ “definida por”

$$g(y) = \text{“o” } x \text{ tal que } f(x) = y.$$

Mas as aspas em “definida por” (e em “o”) sugerem que isto não é uma definição. Pelo menos, nem sempre funcionará com total generalidade. Pois, para que esta definição especifique uma função, tem de haver um e apenas um x tal que $f(x) = y$ —a saída de g tem de ficar unicamente determinada. Além disso, tem de estar especificada para todo $y \in B$. Se existirem x_1 e $x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ mas $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(y)$ não ficaria unicamente determinada para $y = f(x_1) = f(x_2)$. E se não existir x algum tal que $f(x) = y$, então $g(y)$

nem sequer fica especificada. Em outras palavras, para g estar definida, f tem de ser tanto **injetiva** quanto **sobrejetiva**.

Vamos com calma. Dividiremos a questão em duas: dada uma função $f: A \rightarrow B$, quando existe uma função $g: B \rightarrow A$ tal que $g(f(x)) = x$? Tal g “desfaz” o que f faz, e chama-se *inversa à esquerda* de f . Em segundo lugar, quando existe uma função $h: B \rightarrow A$ tal que $f(h(y)) = y$? Tal h chama-se *inversa à direita* de f — f “desfaz” o que h faz.

Proposição fun.16. *Se $f: A \rightarrow B$ é **injetiva**, então existe uma inversa à esquerda $g: B \rightarrow A$ de f tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in A$.*

Prova. Suponhamos que $f: A \rightarrow B$ é **injetiva**. Consideremos $y \in B$. Se $y \in \text{Im}(f)$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é **injetiva**, há apenas um tal $x \in A$. Então podemos definir: $g(y) = x$, isto é, $g(y)$ é “o” $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Se $y \notin \text{Im}(f)$, podemos mapeá-lo para qualquer $a \in A$. Assim, podemos escolher $a \in A$ e definir $g: B \rightarrow A$ por:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{se } f(x) = y \\ a & \text{se } y \notin \text{Im}(f). \end{cases}$$

Está definida para todo $y \in B$, pois para cada tal $y \in \text{Im}(f)$ há exatamente um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Por definição, se $y = f(x)$, então $g(y) = x$, isto é, $g(f(x)) = x$. $\square$

Problema fun.1. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à esquerda g , então f é **injetiva**.

Proposição fun.17. *Se $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva**, então existe uma inversa à direita $h: B \rightarrow A$ de f tal que $f(h(y)) = y$ para todo $y \in B$.*

Prova. Suponhamos que $f: A \rightarrow B$ é **sobrejetiva**. Consideremos $y \in B$. Como f é **sobrejetiva**, existe $x_y \in A$ com $f(x_y) = y$. Então podemos definir: $h(y) = x_y$, isto é, para cada $y \in B$ escolhemos algum $x \in A$ tal que $f(x) = y$; como f é **sobrejetiva** há sempre pelo menos um de onde escolher.¹ Por definição, se $x = h(y)$, então $f(x) = y$, isto é, para todo $y \in B$, $f(h(y)) = y$. $\square$

Problema fun.2. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à direita h , então f é **sobrejetiva**.

¹Como f é **sobrejetiva**, para todo $y \in B$ o conjunto $\{x : f(x) = y\}$ é não vazio. A nossa definição de h exige que escolhamos um único x em cada um destes conjuntos. Que isto seja sempre possível não é de todo óbvio—a possibilidade de fazer estas escolhas é simplesmente assumida como axioma. Em outras palavras, esta proposição pressupõe o chamado Axioma da Escolha, questão a que aqui não damos destaque. Contudo, em muitos casos concretos, p.ex., quando $A = \mathbb{N}$ ou é finito, ou quando f é **bijetiva**, o Axioma da Escolha não é necessário. (No caso em que f é **bijetiva**, para cada $y \in B$ o conjunto $\{x : f(x) = y\}$ tem exatamente um **membro**, logo não há escolha a fazer.)

explanation Combinando as ideias da prova anterior, obtemos agora que toda **bijeção** tem uma inversa, isto é, existe uma única função que é tanto inversa à esquerda quanto à direita de f .

Proposição fun.18. *Se $f: A \rightarrow B$ é **bijetiva**, existe uma função $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que, para todo $x \in A$, $f^{-1}(f(x)) = x$ e, para todo $y \in B$, $f(f^{-1}(y)) = y$.* *sfr:fun:inv: prop:bijection-inverse*

Prova. Exercício. □

Problema fun.3. Prove **Proposição fun.18**. Tem de definir f^{-1} , mostrar que é uma função, e mostrar que é uma inversa de f , isto é, $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

explanation Há uma forma ligeiramente mais geral de extrair inversas. Vimos na **Seção fun.2** que toda função f induz **uma sobrejeção** $f': A \rightarrow \text{Im}(f)$ pondo $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Claramente, se f é **injetiva**, então f' é **bijetiva**, logo tem uma inversa única pela **Proposição fun.18**. Por um pequeno abuso de notação, chamamos por vezes à inversa de f' simplesmente “a inversa de f .”

Proposição fun.19. *Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ tem uma inversa à esquerda g e uma inversa à direita h , então $h = g$.* *sfr:fun:inv: prop:left-right*

Prova. Exercício. □

Problema fun.4. Prove **Proposição fun.19**.

Proposição fun.20. *Toda função f tem no máximo uma inversa.*

sfr:fun:inv: prop:inverse-unique

Prova. Suponhamos que g e h são ambas inversas de f . Então, em particular, g é uma inversa à esquerda de f e h é uma inversa à direita. Pela **Proposição fun.19**, $g = h$. □

fun.5 Composição de Funções

explanation Vimos na **Seção fun.4** que a inversa f^{-1} de **uma bijeção** f é ela própria uma função. Outra operação sobre funções é a composição: podemos definir uma nova função compondo duas funções, f e g , isto é, aplicando primeiro f e depois g . Claro que isto só é possível se as imagens e os domínios forem compatíveis, isto é, a imagem de f tem de ser um subconjunto do domínio de g .

sfr:fun:cmp: sec

Um diagrama pode ajudar a explicar a ideia de composição. Na **Figura fun.5**, representamos duas funções $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ e a sua composição $(g \circ f)$. A função $(g \circ f): A \rightarrow C$ associa cada **membro** de A a **um membro** de C . Especificamos a que **membro** de C fica associado **um membro** de A do seguinte modo: dada uma entrada $x \in A$, aplicamos primeiro a função f a x , obtendo algum $f(x) = y \in B$, depois aplicamos a função g a y , obtendo algum $g(f(x)) = g(y) = z \in C$.

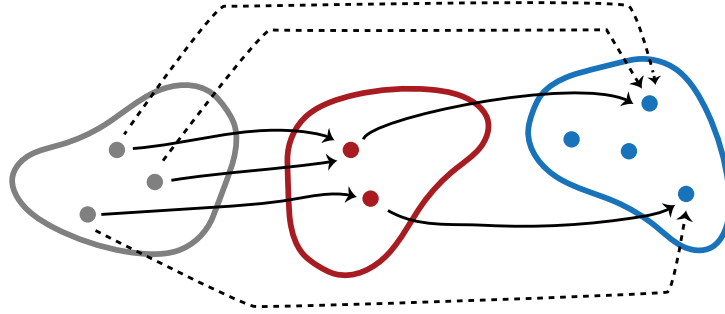


Figura fun.5: A composição $g \circ f$ de duas funções f e g .

sfr:fun:cmp:
fig:composition

Definição fun.21 (Composição). Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ funções. A *composição* de f com g é $g \circ f: A \rightarrow C$, onde $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo fun.22. Consideremos as funções $f(x) = x + 1$, e $g(x) = 2x$. Como $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, para cada entrada x deve primeiro tomar-se o sucessor, depois multiplicar o resultado por dois. Logo a composição é dada por $(g \circ f)(x) = 2(x + 1)$.

Problema fun.5. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são ambas *injetiva*, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é *injetiva*.

Problema fun.6. Mostre que, se $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ são ambas *sobrejetiva*, então $g \circ f: A \rightarrow C$ é *sobrejetiva*.

Problema fun.7. Suponhamos $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$. Mostre que o gráfico de $g \circ f$ é $R_f \mid R_g$.

fun.6 Funções Parciais

sfr:fun:par:
sec

Às vezes é útil relaxar a definição de função de modo que não seja exigido que a saída da função esteja definida para todas as entradas possíveis. Tais mapeamentos são chamados de *funções parciais*.

explanation

Definição fun.23. Uma *função parcial* $f: A \rightarrow B$ é um mapeamento que associa a cada *membro* de A no máximo um *membro* de B . Se f associa um *membro* de B a $x \in A$, dizemos que $f(x)$ está *definido*, e caso contrário *indefinido*. Se $f(x)$ está definido, escrevemos $f(x) \downarrow$, caso contrário $f(x) \uparrow$. O *domínio* de uma função parcial f é o subconjunto de A onde ela está definida, isto é, $\text{dom}(f) = \{x \in A : f(x) \downarrow\}$.

Exemplo fun.24. Toda função $f: A \rightarrow B$ é também uma função parcial. Funções parciais que estão definidas em todo A —isto é, o que até agora chamávamos simplesmente de função—também são chamadas de funções *totais*.

Exemplo fun.25. A função parcial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ é indefinida para $x = 0$ e definida em todo o restante.

Problema fun.8. Dada $f: A \rightarrow B$, defina a função parcial $g: B \rightarrow A$ por: para qualquer $y \in B$, se existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$, então $g(y) = x$; caso contrário $g(y) \uparrow$. Mostre que se f é injetiva, então $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \text{dom}(f)$ e $f(g(y)) = y$ para todo $y \in \text{Im}(f)$.

Definição fun.26 (Gráfico de uma função parcial). Seja $f: A \rightarrow B$ uma função parcial. O gráfico de f é a relação $R_f \subseteq A \times B$ definida por

$$R_f = \{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}.$$

Proposição fun.27. Suponha que $R \subseteq A \times B$ tem a propriedade de que sempre que Rxy e Rxy' então $y = y'$. Então R é o gráfico da função parcial $f: A \rightarrow B$ definida por: se existe um y tal que Rxy , então $f(x) = y$, caso contrário $f(x) \uparrow$. Se R também é serial, isto é, para cada $x \in A$ existe um $y \in B$ tal que Rxy , então f é total.

Prova. Suponha que existe um y tal que Rxy . Se existisse outro $y' \neq y$ tal que Rxy' , a condição sobre R seria violada. Portanto, se existe um y tal que Rxy , esse y é único, e assim f é bem definida. Obviamente, $R_f = R$ e f é total se R é serial. $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas