

fun.1 Funções como Relações

sfr:fun:rel: sec Uma função que mapeia **membros** de A para **membros** de B define obviamente explanation uma relação entre A e B , nomeadamente a relação que se verifica entre x e y se e só se $f(x) = y$. De fato, podemos até—se nos interessa reduzir os blocos de construção da matemática, por exemplo—*identificar* a função f com esta relação, isto é, com um conjunto de pares. Isto levanta então a questão: que relações definem funções deste modo?

Definição fun.1 (Gráfico de uma função). Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. O *gráfico* de f é a relação $R_f \subseteq A \times B$ definida por

$$R_f = \{\langle x, y \rangle : f(x) = y\}.$$

O gráfico de uma função fica unicamente determinado, pela extensionalidade. Além disso, a extensionalidade (sobre conjuntos) justifica de imediato o princípio implícito de extensionalidade para funções, segundo o qual, se f e g compartilham domínio e contradomínio, então são idênticas se coincidem em todos os valores. explanation

Do mesmo modo, se uma relação é “funcional”, então é o gráfico de uma função.

sfr:fun:rel: prop:graph-function **Proposição fun.2.** *Seja $R \subseteq A \times B$ tal que:*

1. *Se Rxy e Rxz , então $y = z$; e*
2. *para todo $x \in A$ existe algum $y \in B$ tal que $\langle x, y \rangle \in R$.*

Então R é o gráfico da função $f: A \rightarrow B$ definida por $f(x) = y$ se e só se Rxy .

Prova. Suponhamos que existe y tal que Rxy . Se existisse outro $z \neq y$ tal que Rxz , a condição sobre R seria violada. Logo, se existe y tal que Rxy , esse y é único, e assim f está bem definida. Obviamente, $R_f = R$. $\square$

Toda função $f: A \rightarrow B$ tem um gráfico, isto é, uma relação em $A \times B$ definida por $f(x) = y$. Por outro lado, toda relação $R \subseteq A \times B$ com as propriedades dadas na **Proposição fun.2** é o gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$. Por causa desta ligação estreita entre funções e os seus gráficos, podemos pensar numa função simplesmente como o seu gráfico. Em outras palavras, funções podem identificar-se com certas relações, isto é, com certos conjuntos de tuplos. Podemos agora considerar fazer operações semelhantes sobre funções às que fizemos sobre relações (ver ??). Em particular: explanation

sfr:fun:rel: defn:funimage **Definição fun.3.** Seja $f: A \rightarrow B$ uma função com $C \subseteq A$.
A *restrição* de f a C é a função $f|_C: C \rightarrow B$ definida por $(f|_C)(x) = f(x)$ para todo $x \in C$. Em outras palavras, $f|_C = \{\langle x, y \rangle \in R_f : x \in C\}$.
A *aplicação* de f a C é $f[C] = \{f(x) : x \in C\}$. Chamamos-lhe também a *imagem* de C por f .

explanation Segue-se destas definições que $\text{Im}(f) = f[\text{dom}(f)]$, para qualquer função f .

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas