

fun.1 Noções Básicas

sfr:fun:bas:sec Uma *função* é um mapa que envia cada **membro** de um dado conjunto para um **membro** específico em algum (outro) conjunto dado. explanation Por exemplo, a operação de somar 1 define uma função: cada número n é mapeado para um único número $n + 1$.

Mais em geral, funções podem tomar pares, triplos, etc., como entradas e devolver algum tipo de saída. Muitas funções nos são familiares da aritmética básica. Por exemplo, a adição e a multiplicação são funções. Tomam dois números e devolvem um terceiro.

Neste sentido matemático e abstrato, uma função é uma *caixa preta*: só importa que saída fica associada a que entrada, não o método de calcular a saída.

Definição fun.1 (Função). Uma *função* $f: A \rightarrow B$ é um mapeamento de cada **membro** de A para um **membro** de B .

Chamamos A de *domínio* de f e B de *contradomínio* de f . Os **membros** de A chamam-se entradas ou *argumentos* de f , e o **membro** de B que fica associado a um argumento x por f chama-se o *valor de f* para o argumento x , escrevendo-se $f(x)$.

A *imagem* $\text{Im}(f)$ de f é o subconjunto do contradomínio constituído pelos valores de f para algum argumento; $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in A\}$.

O diagrama na **Figura 1** pode ajudar a pensar em funções. A elipse à esquerda representa o *domínio* da função; a elipse à direita representa o *contradomínio*; e uma seta aponta de um *argumento* no domínio para o *valor* correspondente no contradomínio.

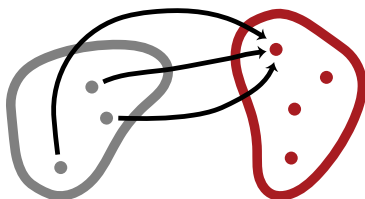


Figura 1: Uma função é um mapeamento de cada **membro** de um conjunto para um **membro** de outro. Uma seta vai de um argumento no domínio para o valor correspondente no contradomínio.

sfr:fun:bas:fig:function **Exemplo fun.2.** A multiplicação toma pares de números naturais como entradas e mapeia-os para números naturais como saídas, logo vai de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (o domínio) para $\mathbb{N}$ (o contradomínio). Como se vê, a imagem é também $\mathbb{N}$, pois todo $n \in \mathbb{N}$ é $n \times 1$.

Exemplo fun.3. A multiplicação é uma função porque associa cada entrada—cada par de números naturais—a uma única saída: $\times: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Em contraste, mapear um número natural n para um real x tal que $x^2 = n$ não é funcional,

pois cada inteiro positivo n tem duas raízes quadradas: $\sqrt{n}$ e $-\sqrt{n}$. Podemos torná-la funcional devolvendo só a raiz quadrada positiva: $\sqrt{\cdot}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo fun.4. A relação que associa cada aluno de uma turma à sua nota final é uma função—nenhum aluno pode ter duas notas finais diferentes na mesma turma. A relação que associa cada aluno de uma turma aos seus progenitores não é uma função: os alunos podem ter zero, ou dois, ou mais progenitores.

explanation Podemos definir funções especificando de modo preciso qual é o valor da função para cada argumento possível. Formas de o fazer são dar uma fórmula, descrever um método para calcular o valor, ou listar os valores para cada argumento. Como quer que as funções sejam definidas, temos de garantir que, para cada argumento, especificamos um, e apenas um, valor.

Exemplo fun.5. Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Esta é uma definição que especifica f como uma função que toma números naturais e devolve números naturais. Diz-nos que, dado um número natural x , f devolverá o seu sucessor $x + 1$. Neste caso, o contradomínio $\mathbb{N}$ não é a imagem de f , pois o número natural 0 não é sucessor de nenhum número natural. A imagem de f é o conjunto de todos os inteiros positivos, $\mathbb{Z}^+$.

Exemplo fun.6. Seja $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x + 2 - 1$. Isto nos diz que g é uma função que toma números naturais e devolve números naturais. Dado um número natural n , g devolverá o predecessor do sucessor do sucessor de n , isto é, $n + 1$.

sfr:fun:bas:
examplefunext

explanation Acabamos de considerar duas funções, f e g , com *definições* diferentes. Contudo, são a *mesma função*. Afinal, para qualquer número natural n , temos $f(n) = n + 1 = n + 2 - 1 = g(n)$. Em outras palavras: as nossas definições de f e g especificam o mesmo mapeamento por meio de equações diferentes. Implicitamente, pois, estamos nos apoiando num princípio de extensionalidade para funções,

$$\text{se } \forall x \, f(x) = g(x), \text{ então } f = g$$

desde que f e g compartilhem o mesmo domínio e contradomínio.

Exemplo fun.7. Também podemos definir funções por casos. Por exemplo, poderíamos definir $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ é par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Como todo número natural é par ou ímpar, a saída desta função será sempre um número natural. Basta lembrar que, se se define uma função por casos, cada entrada possível tem de cair exatamente em um caso. Em alguns casos, isto exigirá uma prova de que os casos são exaustivos e exclusivos.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas