

## arith.1 Algumas Reflexões Filosóficas

sfr:arith:ref:  
sec

Quanto aos pormenores técnicos, por ora basta. Mas o que foi que alcançaram?

Bem, de forma pouco contestável, deram-nos uma matemática pura *belíssima*. Além disso, houve conquistas conceptuais profundas. Foi um insight profundo perceber que a propriedade de completude exprime a diferença crucial entre os reais e os racionais. Além disso, a construção explícita dos reais, como cortes de Dedekind, põe o objeto de estudo da análise em bases sólidas. Sabemos que a noção de *corpo ordenado completo* é coerente, pois os cortes formam precisamente um tal corpo.

Todavia, importa também levantar algumas reservas quanto a essas conquistas.

Primeiro, não é claro que pensar os reais em termos de cortes seja *mais* rigoroso do que pensá-los nas suas expansões decimais familiares (eventualmente infinitas). Esta última “construção” dos reais tem alguma semelhança com a construção via sequências de Cauchy; mas, de fato, era, essencialmente, conhecida dos matemáticos desde princípios do século XVII (ver ??). O verdadeiro aumento de rigor veio da tomada de consciência de que os reais têm a propriedade de completude; a possibilidade de construir números reais como conjuntos particulares talvez não seja, por si só, tão interessante.

É ainda menos claro que a aritmetização (muito mais fácil) dos inteiros ou dos racionais aumente o rigor nessas áreas. Aqui, vale a pena uma observação simples. Tendo *construído* os inteiros como classes de equivalência de pares ordenados de naturais, e depois construído os racionais como classes de equivalência de pares ordenados de inteiros, e depois construído os reais como conjuntos de racionais, *nos esquecemos de imediato* das construções. Em particular: ninguém quereria *invocar* estas construções no decurso de uma prova matemática (exceto, claro, numa prova de que as construções se comportam como deviam). É muito mais fácil falar de um real diretamente do que falar de algum conjunto de conjuntos de conjuntos de conjuntos de conjuntos de conjuntos de conjuntos de naturais.

O mais duvidoso, porém, é que estas definições nos digam o que os inteiros, racionais ou reais *são, do ponto de vista metafísico*. Isto é, é duvidoso que os reais (digamos) *sejam* certos conjuntos (de conjuntos de conjuntos...). A principal barreira a tal visão é que a construção poderia ter sido feita de muitas maneiras diferentes. No caso dos reais, há construções genuinamente diferentes e interessantes (ver ??). Mas eis uma forma trivial de obter construções diferentes: como em ??, poderíamos ter definido pares ordenados de modo ligeiramente diferente; se tivéssemos usado essa noção alternativa de par ordenado, as nossas construções teriam funcionado exatamente tão bem como funcionaram, mas teríamos acabado com objetos diferentes. Assim, há muitas construções rivais, em teoria dos conjuntos, dos inteiros, racionais e reais. Seria, ademais, arbitrário (e embaraçoso) afirmar que os inteiros (digamos) *são estes* conjuntos, e não *aqueles*. (Como na ??, isto é um caso de um argumento tornado célebre por Benacerraf 1965.)

Um outro ponto merece ser levantado: há algo de bastante *estranho* nas

nossas construções. Começamos pelos números naturais. Depois, construímos os inteiros e construímos “o 0 dos inteiros”, isto é,  $[0, 0]_{\sim}$ . Mas  $0 \neq [0, 0]_{\sim}$ . De fato, dadas as nossas construções, *nenhum* natural é um inteiro. Isto parece fortemente contraintuitivo. Na ??, afirmamos, sem grande argumento, que  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ . Agora, se as construções nos dissessem exatamente *o que* são os números, esta afirmação seria trivialmente falsa.

Recuando um pouco, onde chegamos? Trabalhando numa teoria ingênua dos conjuntos e tomando os naturais como dados, podemos *tratar* inteiros, racionais e reais como certos conjuntos. Nesse sentido, podemos *embutir* as teorias destas entidades numa teoria dos conjuntos. Mas a importância filosófica deste embutimento não é assim tão direta.

Claro que isto não é a última palavra! O ponto é apenas este: mostrar que a aritmetização dos reais *é de* profunda significação filosófica exigiria argumento filosófico adicional.

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas

Benacerraf, Paul. 1965. What numbers could not be. *The Philosophical Review* 74(1): 47–73.