

arith.1 A Reta Real

sfr:arith:real:
sec

O passo seguinte é mostrar como construir os reais a partir dos racionais. Antes disso, há que perceber o que há de *distintivo* nos reais.

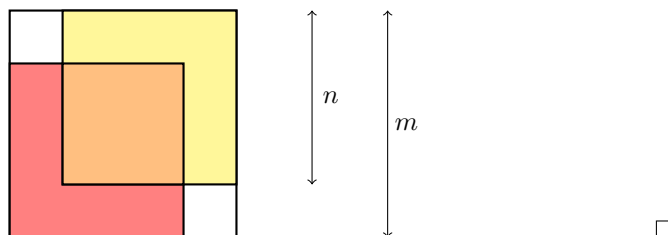
Os reais comportam-se de modo muito parecido com os racionais. (Técnicamente, ambos são exemplos de *corpos ordenados*; para a definição, ver ??.) Agora, se resolveu os exercícios de ??, saberá que há estritamente mais reais do que racionais, isto é, que $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$. Cantor foi o primeiro a provar isto. Há, contudo, cerca de dois milênios e meio que se conhecem números irracionais, isto é, reais que não são racionais. De fato:

sfr:arith:real:
root2irrational

Teorema arith.1. $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Prova. Suponhamos, por *reductio*, que $\sqrt{2}$ é racional. Então $\sqrt{2} = m/n$ para alguns números naturais m e n . De fato, podemos escolher m e n de modo a que a fração não possa ser mais reduzida. Reorganizando, $m^2 = 2n^2$. A partir daqui, completamos a prova de duas formas:

Primeiro, geometricamente (seguindo Tennenbaum).¹ Consideremos estes quadrados:



Como $m^2 = 2n^2$, a região em que os dois quadrados de lado n se sobrepõem tem a mesma área que a região que nenhum dos dois quadrados cobre; isto é, a área do quadrado cor de laranja é igual à soma das áreas dos dois quadrados não sombreados. Logo, se o quadrado cor de laranja tem lado p e cada quadrado não sombreado tem lado q , então $p^2 = 2q^2$. Mas então $\sqrt{2} = p/q$, com $p < m$, $q < n$ e $p, q \in \mathbb{N}$. Isto contradiz o fato de m e n terem sido escolhidos tão pequenos quanto possível.

Segundo, formalmente. Como $m^2 = 2n^2$, segue-se que m é par. (É fácil mostrar que, se x é ímpar, então x^2 é ímpar.) Logo $m = 2r$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Rearranjando, $2r^2 = n^2$, logo n também é par. Assim m e n são ambos pares, e portanto a fração m/n pode ser ainda reduzida. Contradição!

De passagem, esta prova diagramática permite relembrar o material de ??. Tennenbaum (1927–2006) era um matemático inequivocamente moderno; mas a prova é inegavelmente bela, completamente rigorosa e apela à intuição geométrica!

¹Esta prova é relatada por Conway (2006).

Em todo o caso: os reais são “mais extensos” do que os racionais. Nalgum sentido, há “lacunas” nos racionais, e os reais preenchem-nas. Weierstrass apercebeu-se de que isto descreve uma única propriedade dos números reais que os distingue dos racionais, nomeadamente a *propriedade de completude*: *Todo conjunto não vazio de números reais com majorante tem um supremo (menor majorante)*.

É fácil ver que os racionais não têm a propriedade de completude. Por exemplo, considere-se o conjunto dos racionais menores que $\sqrt{2}$, isto é:

$$\{p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \text{ ou } p < 0\}$$

Este conjunto tem um majorante nos racionais; os seus **membros** são todos menores que 3, por exemplo. Mas qual é o seu supremo? Queremos dizer “ $\sqrt{2}$ ”; contudo, acabamos de ver que $\sqrt{2}$ *não* é racional. E não existe racional mínimo entre os que são estritamente maiores que $\sqrt{2}$. Logo, o conjunto tem majorante, mas não tem supremo. Assim, os racionais não satisfazem a propriedade de completude.

Em contraste, o contínuo “moralmente deveria” ter a propriedade de completude. Não queremos apenas que $\sqrt{2}$ seja um número real; queremos preencher todas as “lacunas” da reta racional. Queremos, ainda, que o próprio contínuo não tenha “lacunas”. É exatamente isso que obteremos via completude.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Conway, John. 2006. The power of mathematics. In *Power*, eds. Alan Blackwell and David MacKay, Darwin College Lectures. Cambridge: Cambridge University Press. URL <http://www.cs.toronto.edu/~mackay/conway.pdf>.