

arith.1 De $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Q}$

sfr:arith:rat:
sec

Acabamos de ver como construir os inteiros a partir dos naturais, usando alguma teoria ingênua dos conjuntos. Veremos agora como construir os racionais a partir dos inteiros, de modo muito semelhante. As constatações iniciais são:

1. Todo racional pode escrever-se na forma i/j , onde i e j são inteiros, mas j é diferente de zero.
2. A informação codificada numa expressão i/j pode igualmente codificar-se num par ordenado $\langle i, j \rangle$.

A abordagem óbvia seria pensar nos racionais *como* pares ordenados de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$. Como antes, porém, isso seria um pouco demasiado ingênuo, pois queremos $3/2 = 6/4$, mas $\langle 3, 2 \rangle \neq \langle 6, 4 \rangle$. Mais geralmente, quereremos o seguinte:

$$a/b = c/d \text{ sse } a \times d = b \times c$$

Para obter isto, definimos uma *relação de equivalência* em $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\})$ assim:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \text{ sse } a \times d = b \times c$$

Há que verificar que isto é uma relação de equivalência. É muito parecido com o caso de $\sim$, e deixamo-lo como exercício.

Problema arith.1. Mostre que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Mas isto permite-nos dizer o seguinte:

Definição arith.1. Os racionais são as classes de equivalência, sob $\sim$, dos pares de inteiros (cujo segundo elemento é não nulo). Isto é, $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0_{\mathbb{Z}}\}))/\sim$.

Tal como para os inteiros, queremos também definir algumas operações básicas. Sendo $[i, j]_{\sim}$ a classe de equivalência sob $\sim$ com $\langle i, j \rangle$ como **um membro**, definimos:

$$\begin{aligned} [a, b]_{\sim} + [c, d]_{\sim} &= [ad + bc, bd]_{\sim} \\ [a, b]_{\sim} \times [c, d]_{\sim} &= [ac, bd]_{\sim}. \end{aligned}$$

Para definir $r \leq s$ nestes racionais, usamos o fato de que $r \leq s$ sse $s - r$ não é negativo, isto é, $r - s$ pode escrever-se como i/j com i não negativo e j positivo:

$$[a, b]_{\sim} \leq [c, d]_{\sim} \text{ sse } [c, d]_{\sim} - [a, b]_{\sim} = [i_{\mathbb{Z}}, j_{\mathbb{Z}}]_{\sim}$$

para algum $i \in \mathbb{N}$ e $0 \neq j \in \mathbb{N}$.

Depois há que verificar que estas definições se comportam como *devem*; relegamo-lo a ???. Mas de fato comportam-se! Por fim, queremos alguma forma de tratar inteiros *como* racionais; logo, para cada $i \in \mathbb{Z}$, estipulamos $i_{\mathbb{Q}} = [i, 1_{\mathbb{Z}}]_{\sim}$. De novo, verificamos na ??? que tudo isto se comporta corretamente.

Problema arith.2. Mostre que $(i + j)_{\mathbb{Q}} = i_{\mathbb{Q}} + j_{\mathbb{Q}}$ e $(i \times j)_{\mathbb{Q}} = i_{\mathbb{Q}} \times j_{\mathbb{Q}}$ e $i \leq j \leftrightarrow i_{\mathbb{Q}} \leq j_{\mathbb{Q}}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{Z}$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas