

arith.1 De $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$

sfr:arith:int:
sec

Eis duas constatações básicas (no sentido de “ideias que retemos”):

1. Todo inteiro pode escrever-se na forma $n - m$, com $n, m \in \mathbb{N}$.
2. A informação codificada numa expressão $n - m$ pode igualmente codificar-se por um par ordenado $\langle n, m \rangle$.

Já sabemos que os pares ordenados de números naturais são os **membros** de $\mathbb{N}^2$; estamos a assumir, também, que compreendemos $\mathbb{N}$. Eis uma sugestão ingênua, fundada nestas duas constatações: *tratar os inteiros como pares ordenados de números naturais*.

De fato, esta sugestão é demasiado ingênua. Obviamente, queremos que seja verdade que $0 - 2 = 4 - 6$. Mas, evidentemente, $\langle 0, 2 \rangle \neq \langle 4, 6 \rangle$. Logo, não podemos simplesmente dizer que $\mathbb{N}^2$ é o conjunto dos inteiros.

Generalizando a partir do problema precedente, o que queremos é o seguinte:

$$a - b = c - d \text{ sse } a + d = c + b$$

(Deve ser óbvio que assim é que os inteiros *devem* comportar-se: basta somar b e d a ambos os lados.) A forma fácil de garantir este comportamento é definir uma relação de equivalência entre pares ordenados, $\sim$, do seguinte modo:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \text{ sse } a + d = c + b$$

Resta-nos mostrar que isto é uma relação de equivalência.

Proposição arith.1. $\sim$ é uma relação de equivalência.

Prova. Há que mostrar que $\sim$ é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexividade: Evidentemente $\langle a, b \rangle \sim \langle a, b \rangle$, pois $a + b = b + a$.

Simetria: Suponhamos $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle$, logo $a + d = c + b$. Então $c + b = a + d$, pelo que $\langle c, d \rangle \sim \langle a, b \rangle$.

Transitividade: Suponhamos $\langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \sim \langle m, n \rangle$. Logo, $a + d = c + b$ e $c + n = m + d$. Assim, $a + d + c + n = c + b + m + d$, e portanto $a + n = m + b$. Logo, $\langle a, b \rangle \sim \langle m, n \rangle$. $\square$

Podemos agora usar esta relação de equivalência para formar classes de equivalência:

Definição arith.2. Os inteiros são as classes de equivalência, sob $\sim$, dos pares ordenados de números naturais; isto é, $\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2 / \sim$.

Agora, podem surgir várias reações *filosóficas* distintas face a esta definição estipulativa. Antes de as considerarmos, porém, vale a pena continuar com alguns pormenores técnicos.

Tendo dito o que são os inteiros, precisamos de definir funções e relações básicas sobre eles. Escrevamos $[m, n]_{\sim}$ para a classe de equivalência sob $\sim$ que tem $\langle m, n \rangle$ como **um membro**.¹ Isto é:

$$[m, n]_{\sim} = \{\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2 : \langle a, b \rangle \sim \langle m, n \rangle\}$$

Apresentamos, pois, algumas definições:

$$\begin{aligned} [a, b]_{\sim} + [c, d]_{\sim} &= [a + c, b + d]_{\sim} \\ [a, b]_{\sim} \times [c, d]_{\sim} &= [ac + bd, ad + bc]_{\sim} \\ [a, b]_{\sim} \leq [c, d]_{\sim} &\text{ sse } a + d \leq b + c \end{aligned}$$

(Como é habitual, uso ‘ ab ’ no sentido de ‘ $(a \times b)$ ’, só para tornar os axiomas mais legíveis.) Há, ainda, que garantir que estas definições se comportam como *devem*. Explicitar o que isto significa, e verificá-lo, é trabalhoso; relegamos os pormenores a ???. Em resumo, contudo: tudo funciona!

Resta um último ponto. Construimos os inteiros a partir dos números naturais. Isto significa que os naturais *não são, eles próprios, inteiros*. Voltaremos ao significado filosófico disto na ??. Do ponto de vista puramente técnico, porém, precisamos de alguma forma de tratar números naturais *como* inteiros. A ideia é simples: para cada $n \in \mathbb{N}$, estipulamos $n_{\mathbb{Z}} = [n, 0]_{\sim}$. Há que confirmar que esta definição é bem comportada, isto é, que para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (m + n)_{\mathbb{Z}} &= m_{\mathbb{Z}} + n_{\mathbb{Z}} \\ (m \times n)_{\mathbb{Z}} &= m_{\mathbb{Z}} \times n_{\mathbb{Z}} \\ m \leq n &\leftrightarrow m_{\mathbb{Z}} \leq n_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Mas isto é bastante direto. Por exemplo, para mostrar que a segunda condição se verifica, podemos apoiar-nos no comportamento dos naturais e raciocinar assim:

$$\begin{aligned} (m \times n)_{\mathbb{Z}} &= [m \times n, 0]_{\sim} \\ &= [m \times n + 0 \times 0, m \times 0 + 0 \times n]_{\sim} \\ &= [m, 0]_{\sim} \times [n, 0]_{\sim} \\ &= m_{\mathbb{Z}} \times n_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Deixamos como exercício confirmar que as outras duas condições se verificam.

Problema arith.1. Mostre que $(m + n)_{\mathbb{Z}} = m_{\mathbb{Z}} + n_{\mathbb{Z}}$ e $m \leq n \leftrightarrow m_{\mathbb{Z}} \leq n_{\mathbb{Z}}$, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

¹Nota: com a notação introduzida na ??, escreveríamos $[\langle m, n \rangle]_{\sim}$ para o mesmo objeto; isso, porém, torna a leitura um pouco mais difícil.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas