

## arith.1 Apêndice: os Reais como Sequências de Cauchy

sfr:arith:cauchy:  
sec

Na ??, construímos os reais como cortes de Dedekind. Nesta secção, explicamos uma construção alternativa. Apoia-se na definição, devida a Cauchy, do que hoje chamamos *sequência de Cauchy*; mas o uso desta definição para *construir* os reais deve-se a outros autores do século XIX, nomeadamente Weierstrass, Heine, Méray e Cantor. (Para uma boa história, ver [O'Connor and Robertson 2005](#).)

Antes de chegarmos ao século XIX, vale a pena considerar Simon Stevin (1548–1620). Em resumo, Stevin apercebeu-se de que podemos pensar cada real em termos da sua expansão decimal. Assim, mesmo um número irracional, como  $\sqrt{2}$ , tem uma expansão decimal agradável, que começa:

1.41421356237...

É muito fácil modelar expansões decimais na teoria dos conjuntos: basta considerá-las como funções  $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , onde  $d(n)$  é o  $n$ -ésimo algarismo decimal que nos interessa. Depois precisamos de um pequeno ajuste, para tratar a parte do número real que vem antes da vírgula decimal (aqui, apenas 1). Precisaremos também de outro ajuste (uma relação de equivalência) para garantir que, por exemplo,  $0.999\dots = 1$ . Mas não é difícil apresentar uma construção perfeitamente rigorosa dos números reais, à maneira de Stevin, dentro da teoria dos conjuntos.

Stevin não é o nosso foco. (Para mais sobre Stevin, ver [Katz and Katz 2012](#).) Mas eis um pensamento estreitamente relacionado. Em vez de tratar diretamente a expansão decimal de  $\sqrt{2}$ , podemos antes considerar uma *sequência* de aproximações racionais cada vez mais precisas a  $\sqrt{2}$ , olhando para as expansões cada vez mais precisas:

1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421, ...

A ideia de que os reais podem ser considerados via “aproximações cada vez melhores” nos dá a base para outra sequência de insights, semelhante às constatações que retivemos ao construir  $\mathbb{Q}$  a partir de  $\mathbb{Z}$ , ou  $\mathbb{Z}$  a partir de  $\mathbb{N}$ . Os insights básicos são estes:

1. Todo o real pode escrever-se como uma expansão decimal (eventualmente infinita).
2. A informação codificada por uma expansão decimal (eventualmente infinita) pode igualmente codificar-se por uma sequência de números racionais.
3. Uma sequência de números racionais pode pensar-se como uma função de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{Q}$ ; basta definir  $f(n)$  como o  $n$ -ésimo racional na sequência.

Claro que nem *qualquer* função de  $\mathbb{N}$  para  $\mathbb{Q}$  nos dará um número real. Por exemplo, considere-se esta função:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Essencialmente, a preocupação é que a sequência  $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  não parece “convergir” para nenhum real. Logo: para garantir que consideramos sequências que de fato convergem para algum real, precisamos de restringir a atenção a sequências que tenham algum *limite*.

Já encontramos a ideia de limite em ???. Mas não podemos usar *exatamente* a mesma definição que ali. A expressão “ $(\forall \varepsilon > 0)$ ” envolvia tacitamente quantificação sobre os números reais; e estávamos a considerar limites de funções nos reais; logo, invocar essa definição seria valer-nos dos números reais — e eram precisamente eles que estávamos a tentar *construir*. Felizmente, podemos trabalhar com uma ideia estreitamente relacionada com a de limite.

**Definição arith.1.** Uma função  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  é uma *sequência de Cauchy* sse, para qualquer  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$  positivo, se tem  $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall m, n > \ell)|f(m) - f(n)| < \varepsilon$ .

sfr:arith:cauchy:  
def:CauchySequence

A ideia geral de limite é a mesma de antes: se se quer um certo nível de precisão (medido por  $\varepsilon$ ), há uma “região” onde olhar (qualquer entrada maior que  $\ell$ ). E é fácil ver que a nossa sequência  $1, 1.4, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots$  tem limite: se se quer aproximar  $\sqrt{2}$  com erro inferior a  $1/10^n$ , basta olhar para qualquer entrada depois da  $n$ -ésima.

O pensamento óbvio seria então dizer que um número real é simplesmente qualquer sequência de Cauchy. Mas, como nas construções de  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ , isso seria demasiado ingênuo: para um dado número real, várias sequências de Cauchy diferentes “indicam” esse número. Uma forma simples de ver isto é a seguinte. Dada uma sequência de Cauchy  $f$ , defina-se  $g$  como exatamente a mesma função que  $f$ , exceto que  $g(0) \neq f(0)$ . Como as duas sequências coincidem em todo o lado depois do primeiro número, quereremos, em última análise, dizer que têm o mesmo limite, no sentido de **Definição arith.1**, e portanto devem ser pensadas como “definindo” o mesmo real. Logo, devemos pensar nestas sequências de Cauchy como o mesmo número real.

Consequentemente, voltamos a precisar de definir uma relação de equivalência sobre as sequências de Cauchy, e identificar os números reais com *classes* de equivalência. Precisamos primeiro da ideia de uma função que tende para 0 no limite. Para qualquer função  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , digamos que  $h$  *tende para* 0 sse, para qualquer  $\varepsilon \in \mathbb{Q}$  positivo, se tem que  $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall n > \ell)|h(n)| < \varepsilon$ .<sup>1</sup> Além disso, sendo  $f$  e  $g$  funções  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , definamos  $(f - g)(n) = f(n) - g(n)$ . Definimos agora:

$$f \approx g \text{ sse } (f - g) \text{ tende para } 0.$$

Há que verificar que  $\approx$  é uma relação de equivalência; e de fato é. Podemos então, se quisermos, definir os reais como as classes de equivalência, sob  $\approx$ , de todas as sequências de Cauchy de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ .

<sup>1</sup>Compare-se com a definição de  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  em ???.

**Problema arith.1.** Seja  $f(n) = 0$  para todo  $n$ . Seja  $g(n) = \frac{1}{(n+1)^2}$ . Mostre que ambas são sequências de Cauchy e que o limite de ambas as funções é 0, de modo que também  $f \sim_{\mathbb{R}} g$ .

Feito isto, como de costume escrevemos  $[f]_{\sim}$  para a classe de equivalência que tem  $f$  como **um membro**. Porém, para manter a legibilidade, no que se segue omitimos o subscrito e escrevemos apenas  $[f]$ . Estipulamos também que, para cada  $q \in \mathbb{Q}$ , se tem  $q_{\mathbb{R}} = [c_q]$ , onde  $c_q$  é a função constante  $c_q(n) = q$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Definimos depois relações e operações básicas sobre os reais, por exemplo:

$$\begin{aligned}[f] + [g] &= [(f + g)] \\ [f] \times [g] &= [(f \times g)]\end{aligned}$$

onde  $(f + g)(n) = f(n) + g(n)$  e  $(f \times g)(n) = f(n) \times g(n)$ . Claro que também há que verificar que cada uma de  $(f + g)$ ,  $(f - g)$  e  $(f \times g)$  é sequência de Cauchy quando  $f$  e  $g$  o são; mas o são, e deixamo-lo ao leitor.

Por fim, definimos uma noção de ordem. Dizemos que  $[f]$  é *positivo* sse tanto  $[f] \neq 0_{\mathbb{Q}}$  como  $(\exists \ell \in \mathbb{N})(\forall n > \ell) 0 < f(n)$ . Depois dizemos  $[f] < [g]$  sse  $[(g - f)]$  é positivo. Há que verificar que isto está bem definido (isto é, que não depende da escolha da função “representante” na classe de equivalência). Mas tendo feito isto, é bastante fácil mostrar que obtemos as propriedades algébricas certas; isto é:

**Teorema arith.2.** *As sequências de Cauchy constituem um corpo ordenado.*

*Prova.* Exercício. □

**Problema arith.2.** Mostre que as sequências de Cauchy constituem um corpo ordenado.

É mais difícil provar que os reais, assim construídos, têm a propriedade de completude, pelo que daremos a prova.

**Teorema arith.3.** *Todo o conjunto não vazio de sequências de Cauchy com majorante tem supremo (menor majorante).*

*Esboço de prova.* Seja  $S$  um conjunto não vazio de sequências de Cauchy com majorante. Então existe algum  $p \in \mathbb{Q}$  tal que  $p_{\mathbb{R}}$  é majorante de  $S$ . Seja  $r \in S$ ; então existe algum  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $q_{\mathbb{R}} < r$ . Logo, se existe supremo de  $S$ , este está entre  $q_{\mathbb{R}}$  e  $p_{\mathbb{R}}$  (inclusive).

Nos aproximaremos do supremo, abordando-o simultaneamente por baixo e por cima. Em particular, definimos duas funções,  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ , com a ideia de que  $f$  se irá aproximar do supremo por cima e  $g$  por baixo. Começamos por definir:

$$\begin{aligned}f(0) &= p \\ g(0) &= q\end{aligned}$$

Então, sendo  $a_n = \frac{f(n)+g(n)}{2}$ , definamos:<sup>2</sup>

$$f(n+1) = \begin{cases} a_n & \text{se } (\forall h \in S)[h] \leq (a_n)_{\mathbb{R}} \\ f(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$g(n+1) = \begin{cases} a_n & \text{se } (\exists h \in S)[h] \geq (a_n)_{\mathbb{R}} \\ g(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tanto  $f$  como  $g$  são sequências de Cauchy. (Isto verifica-se com relativa facilidade, mas deixamo-lo como exercício.) Note-se que a função  $(f-g)$  tende para 0, pois a diferença entre  $f$  e  $g$  reduz-se à metade a cada passo. Logo  $[f] = [g]$ .

Mostramos primeiro que  $[f]$  é majorante de  $S$ , isto é, que  $(\forall h \in S)[h] \leq [f]$ . (Invocaremos **Teorema arith.2** ao longo do argumento.) Seja  $h \in S$  e suponhamos, por *reductio*, que  $[f] < [h]$ , de modo que  $0_{\mathbb{R}} < [(h-f)]$ . Como  $f$  é uma sequência de Cauchy monotonamente decrescente, existe algum  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $[(c_{f(n)} - f)] < [(h-f)]$ . Logo:

$$(f(n))_{\mathbb{R}} = [c_{f(n)}] < [f] + [(h-f)] = [h],$$

o que contradiz o fato de que, por construção,  $[h] \leq (f(n))_{\mathbb{R}}$ .

Mostramos a seguir que  $[f] = [g]$  é o supremo de  $S$ . Seja  $j$  qualquer sequência de Cauchy e suponhamos  $[j] < [g]$ . Raciocinando como acima (usando o fato de  $g$  ser *crescente*), existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $[j] < (g(n))_{\mathbb{R}}$ . Mas, por construção, existe  $h \in S$  tal que  $(g(n))_{\mathbb{R}} \leq [h]$ , logo  $[j] < [h]$  e portanto  $[j]$  não é majorante de  $S$ .  $\square$

## Créditos das Imagens

## Referências Bibliográficas

- Katz, Karin Usadi and Mikhail G. Katz. 2012. Stevin numbers and reality. *Foundations of Science* 17(2): 109–23.
- O'Connor, John J. and Edmund F. Robertson. 2005. The real numbers: Stevin to Hilbert URL [http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real\\_numbers\\_2.html](http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Real_numbers_2.html).

---

<sup>2</sup>Isto é uma definição recursiva. Mas ainda *não* demos qualquer razão para crer que definições recursivas são legítimas.