Capítulo udf

Passos rumo a Z

z.1 A história com mais pormenor

sth:z:story:sec

Na **??**, citamos a descrição de Shoenfield do processo de formação de conjuntos. Queremos agora escrever mais alguns princípios, para tornar esta história um pouco mais precisa. Eis-os:

> *Estágios-são-chave.* Cada conjunto forma-se por algum estágio.
>
> *Estágios-são-ordenados.* Os estágios estão ordenados: alguns vêm *antes* de outros.[1]
>
> *Estágios-acumulam.* Para qualquer estágio S, e para quaisquer conjuntos que se formaram *antes* do estágio S: forma-se, no estágio S, um conjunto cujos membros são exatamente esses conjuntos. Mais nada se forma no estágio S.

Estes são princípios informais, mas poderemos usá-los para justificar vários dos axiomas da teoria de conjuntos de Zermelo.

(Convém uma palavra de cautela. Embora vamos apresentar alguns axiomas completamente standard, com nomes completamente standard, os princípios em itálico que acabamos de apresentar não têm nomes particulares na literatura. São apenas alcunhas que esperamos serem úteis.)

z.2 Separação

sth:z:sep:sec

Começamos com um princípio que substitui a compreensão ingênua:

Esquema de Separação (Esquema de Separação). Para cada fórmula $\varphi(x)$, isto é um axioma: para qualquer A, o conjunto $\{x \in A : \varphi(x)\}$ existe.

[1] Assumiremos de fato—tacitamente—que os estágios estão *bem ordenados*. O que isto significa explica-se no **??**. É um pressuposto substancial. De fato, usando uma técnica muito engenhosa devida a Scott (1974), este pressuposto pode ser *evitado* e depois *deduzido*. (Isto também explicará por que devemos pensar que existe um estágio inicial.) Não podemos aprofundar isso aqui; para mais, veja Button (2021).

Note que isto não é um único axioma. É um *esquema* de axiomas. Há *infinitamente muitos* axiomas de Separação; um para cada fórmula $\varphi(x)$. O esquema pode igualmente ser (e normalmente é) escrito do seguinte modo:

> Para qualquer fórmula $\varphi(x)$ que não contenha "S", isto é um axioma:
>
> $$\forall A \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow (\varphi(x) \wedge x \in A)).$$

Em conformidade com a convenção assinalada no início da **??**, as fórmulas φ nos axiomas de Separação podem ter parâmetros.[2]

A Separação justifica-se de imediato pela concepção cumulativa iterativa de conjuntos que vamos expondo. Para ver por que, seja A um conjunto. Então A forma-se por algum estágio S (por *Estágios-são-chave*). Uma vez que A se formou no estágio S, todos os membros de A formaram-se antes do estágio S (por *Estágios-acumulam*). Consideremos em particular todos os conjuntos que são membros de A e que também satisfazem φ; claramente todos estes conjuntos também se formaram antes do estágio S. Logo formam-se num conjunto $\{x \in A : \varphi(x)\}$ também no estágio S (por *Estágios-acumulam*).

Ao contrário da compreensão ingênua, isto evita o paradoxo de Russell. Pois não podemos simplesmente afirmar a existência do conjunto $\{x : x \notin x\}$. Pelo contrário, *dado* algum conjunto A, podemos afirmar a existência do conjunto $R_A = \{x \in A : x \notin x\}$. Mas isto só prova que $R_A \notin R_A$ e $R_A \notin A$, o que não é preocupante.

Contudo, a Separação tem uma consequência imediata e marcante:

Teorema z.1. *Não existe conjunto* universal*, isto é,* $\{x : x = x\}$ *não existe.* *sth:z:sep: thm:NoUniversalSet*

Prova. Por redução ao absurdo, suponhamos que V é um conjunto universal. Então, por Separação, $R = \{x \in V : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ existe, o que contradiz o paradoxo de Russell. □

A ausência de um conjunto universal—de fato, a abertura da hierarquia de conjuntos—é uma das ideias mais fundamentais por detrás da concepção cumulativa iterativa. Por isso vale a pena ver que, intuitivamente, poderíamos chegar lá por outro caminho. Um conjunto universal teria de ser um membro de si próprio. Mas, na nossa concepção cumulativa iterativa, cada conjunto aparece (pela primeira vez) na hierarquia no primeiro estágio imediatamente a seguir a todos os seus membros. Isto implica que *nenhum* conjunto pertence a si próprio. Pois qualquer conjunto que pertencesse a si próprio teria de ocorrer pela primeira vez imediatamente depois do estágio em que ocorreu pela primeira vez, o que é absurdo. (Veremos na **??** como tornar esta explicação mais rigorosa, usando a noção de "posto" de um conjunto. Contudo, precisaremos de mais alguns axiomas para o fazer.)

Eis mais algumas consequências da Separação e da Extensionalidade.

[2] Para uma explicação do que isto significa, veja a discussão imediatamente a seguir a **??**.

sth:z:sep: prop:emptyexists

Proposição z.2. *Se existe algum conjunto, então $\emptyset$ existe.*

Prova. Se A é um conjunto, $\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}$ existe por Separação. □

Proposição z.3. *$A \setminus B$ existe quaisquer que sejam os conjuntos A e B*

Prova. $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ existe por Separação. □

Também se verifica que existem (quase) interseções arbitrárias:

sth:z:sep: prop:intersectionsexist

Proposição z.4. *Se $A \neq \emptyset$, então $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A)x \in y\}$ existe.*

Prova. Seja $A \neq \emptyset$, logo existe algum $c \in A$. Então $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A)x \in y\} = \{x \in c : (\forall y \in A)x \in y\}$, que existe por Separação. □

Note, porém, a condição de que $A \neq \emptyset$; pois $\bigcap \emptyset$ seria o conjunto universal, vacuamente, o que contradiz Teorema z.1.

z.3 União

sth:z:union: sec

Proposição z.4 deu-nos interseções. Mas, se quisermos que existam uniões arbitrárias, precisamos de enunciar outro axioma:

União (União). Para qualquer conjunto A, o conjunto $\bigcup A = \{x : (\exists b \in A)x \in b\}$ existe.

$$\forall A \exists U \forall x (x \in U \leftrightarrow (\exists b \in A)x \in b)$$

Este axioma também se justifica pela concepção cumulativa iterativa. Seja A um conjunto, logo A forma-se por algum estágio S (por *Estágios-são-chave*). Cada membro de A formou-se *antes* de S (por *Estágios-acumulam*); logo, raciocinando de modo análogo, cada membro de cada membro de A formou-se antes de S. Assim, todos *esses* conjuntos estão disponíveis antes de S, para serem reunidos num conjunto em S. E esse conjunto é precisamente $\bigcup A$.

z.4 Pares

sth:z:pairs: sec

O próximo axioma a considerar é o seguinte:

Pares (Pares). Quaisquer que sejam os conjuntos a, b, o conjunto $\{a, b\}$ existe.

$$\forall a \forall b \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Eis como justificar este axioma à luz da concepção iterativa. Suponhamos que a está disponível no estágio S, e b no estágio T. Seja M o que quer que seja dos estágios S e T que ocorre mais tarde. Então, uma vez que a e b estão ambos disponíveis no estágio M, o conjunto $\{a, b\}$ é uma coleção possível disponível em qualquer estágio depois de M (o que quer que seja o posterior).

Mas espera! Porquê assumir que *existem* estágios depois de M? Se não existir nenhum, a nossa justificação falha. Por isso, para justificar Pares, teremos de acrescentar outro princípio à história que contamos na Seção z.1, nomeadamente:

> *Estágios-prosseguem.* Não há último estágio.

Este princípio está justificado? Nada na história de Shoenfield afirmava *explicitamente* que não há último estágio. Ainda assim, mesmo que seja (estritamente falando) um acréscimo à nossa história, encaixa bem na ideia básica de que os conjuntos se formam em estágios. Aceitá-lo-emos simplesmente no que se segue. E, assim, aceitaremos também o Axioma dos Pares.

Armados com este novo axioma, podemos provar a existência de muitos mais conjuntos. Por exemplo:

Proposição z.5. *Quaisquer que sejam os conjuntos a e b, existem os seguintes conjuntos:* sth:z:pairs: prop:pairsconsequences

1. $\{a\}$ sth:z:pairs: singleton
2. $a \cup b$ sth:z:pairs: binunion
3. $\langle a, b\rangle$ sth:z:pairs: tuples

Prova. (1). Por Pares, $\{a, a\}$ existe, o que é $\{a\}$ por Extensionalidade.

(2). Por Pares, $\{a, b\}$ existe. Ora, $a \cup b = \bigcup\{a, b\}$ existe por União.

(3). Por (1), $\{a\}$ existe. Por Pares, $\{a, b\}$ existe. Ora, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \langle a, b\rangle$ existe, de novo por Pares. □

Problema z.1. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos a, b, c, o conjunto $\{a, b, c\}$ existe.

Problema z.2. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos $a_1, \ldots, a_n$, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ existe.

z.5 Conjuntos potência

Prosseguiremos com outro axioma: sth:z:power: sec

Conjuntos potência (Conjuntos potência). Para qualquer conjunto A, existe o conjunto $\wp(A) = \{x : x \subseteq A\}$.

$$\forall A \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (\forall z \in x) z \in A)$$

A nossa justificação é bastante direta. Suponhamos que A se forma no estágio S. Então todos os membros de A estavam disponíveis antes de S (por *Estágios-acumulam*). Logo, raciocinando como na justificação da Separação, cada subconjunto de A forma-se até ao estágio S. Estão todos disponíveis, para serem reunidos num único conjunto, em qualquer estágio depois de S.

E sabemos que existe algum tal estágio, pois S não é o último estágio (por *Estágios-prosseguem*). Logo $\wp(A)$ existe.

Eis uma boa consequência dos conjuntos potência:

Proposição z.6. *Dados quaisquer conjuntos A, B, o seu produto cartesiano $A \times B$ existe.*

Prova. O conjunto $\wp(\wp(A \cup B))$ existe por Conjuntos potência e Proposição z.5. Logo, por Separação, existe este conjunto:

$$C = \{z \in \wp(\wp(A \cup B)) : (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y \rangle\}.$$

Agora, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, o conjunto $\langle x, y \rangle$ existe por Proposição z.5. Além disso, uma vez que $x, y \in A \cup B$, temos $\{x\}, \{x, y\} \in \wp(A \cup B)$, e $\langle x, y \rangle \in \wp(\wp(A \cup B))$. Logo $A \times B = C$. □

Nesta prova, o axioma dos conjuntos potência interage com a Separação. E isso não surpreende. Sem Separação, o princípio dos conjuntos potência não seria muito *poderoso*. Afinal, a Separação nos diz que subconjuntos de um conjunto existem e, por conseguinte, determina quão "gordo" é cada conjunto potência.

Problema z.3. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos A, B: (i) existe o conjunto de todas as relações com domínio A e contradomínio B; e (ii) existe o conjunto de todas as funções de A para B.

Problema z.4. Seja A um conjunto, e seja $\sim$ uma relação de equivalência em A. Prove que existe o conjunto das classes de equivalência sob $\sim$ em A, isto é, $A/_\sim$.

z.6 Infinito

sth:z:infinity-again:sec

Já temos axiomas suficientes para garantir que há infinitamente muitos conjuntos (se é que existe algum). De fato, suponhamos que algum conjunto existe; então $\emptyset$ existe (por Proposição z.2). Agora, para qualquer conjunto x, o conjunto $x \cup \{x\}$ existe por Proposição z.5. Logo, aplicando isto algumas vezes, obtemos conjuntos como se segue:

0. $\emptyset$
1. $\{\emptyset\}$
2. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

e podemos verificar que cada um destes conjuntos é distinto.

Começamos a numeração em 0, por várias razões. Mas uma delas é esta. Não é difícil verificar que o conjunto que rotulamos "n" tem exatamente n membros e que (intuitivamente) se forma no n-ésimo estágio.

Contudo. Isto nos dá *infinitamente muitos* conjuntos, mas não garante que exista um conjunto *infinito*, isto é, um conjunto com infinitamente muitos membros. E isto importa deveras: a menos que encontremos um conjunto infinito de Dedekind, não podemos construir uma álgebra de Dedekind. Mas queremos uma álgebra de Dedekind, para a podermos tratar como o conjunto dos números naturais. (Compare-se com **??**.)

Importa que os axiomas que estabelecemos até aqui *não* garantem a existência de nenhum conjunto infinito. Por isso temos de enunciar um novo axioma:

Infinito (Infinito). Existe um conjunto, I, tal que $\emptyset \in I$ e $x \cup \{x\} \in I$ sempre que $x \in I$.

$$\begin{aligned}\exists I((\exists o \in I)\forall x\ x \notin o \wedge \\ (\forall x \in I)(\exists s \in I)\forall z(z \in s \leftrightarrow (z \in x \vee z = x)))\end{aligned}$$

É fácil ver que o conjunto I que nos é dado pelo Axioma do Infinito é infinito de Dedekind. O seu elemento distinguido é $\emptyset$, e a injeção em I é dada por $s(x) = x \cup \{x\}$. Agora, **??** mostrou como extrair uma álgebra de Dedekind de um conjunto infinito de Dedekind; e trataremos isso como o nosso conjunto de números naturais. Mais precisamente:

Definição z.7. Seja I qualquer conjunto que nos seja dado pelo Axioma do Infinito. Seja s a função $s(x) = x \cup \{x\}$. Seja $\omega = \mathrm{clo}_s(\emptyset)$. Chamamos *números naturais* aos membros de ω, e dizemos que n é o resultado de n aplicações de s a $\emptyset$. sth:z:infinity-again: defnomega

Pode agora voltar atrás e verificar que o conjunto rotulado "n", há uns parágrafos, será tratado *como* o número n.

Discutiremos o significado desta estipulação na Seção z.8. Por ora, permite-nos provar um resultado intuitivo:

Proposição z.8. *Nenhum número natural é infinito de Dedekind.* sth:z:infinity-again: naturalnumbersarentinfinite

Prova. A prova é por indução, isto é, **??**. Claramente $0 = \emptyset$ não é infinito de Dedekind. Para o passo indutivo, estabeleceremos a contrapositiva: se (absurdamente) $s(n)$ for infinito de Dedekind, então n é infinito de Dedekind.

Suponhamos, pois, que $s(n)$ é infinito de Dedekind, isto é, que existe alguma injeção f com $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathrm{dom}(f) = s(n) = n \cup \{n\}$. Há dois casos a considerar.

Caso 1: $n \notin \mathrm{Im}(f)$. Então $\mathrm{Im}(f) \subseteq n$, e $f(n) \in n$. Seja $g = f\restriction_n$; agora $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(f) \setminus \{f(n)\} \subsetneq n = \mathrm{dom}(g)$. Logo n é infinito de Dedekind.

Caso 2: $n \in \mathrm{Im}(f)$. Fixemos $m \in \mathrm{dom}(f) \setminus \mathrm{Im}(f)$, e definamos uma função h com domínio $s(n) = n \cup \{n\}$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \neq n \\ m & \text{se } f(x) = n \end{cases}$$

Assim h e f coincidem em toda a parte, exceto que $h(f^{-1}(n)) = m \neq n = f(f^{-1}(n))$. Uma vez que f é uma injeção, $n \notin \mathrm{Im}(h)$; e $\mathrm{Im}(h) \subsetneq \mathrm{dom}(h) = s(n)$. Logo n é infinito de Dedekind, pelo argumento do Caso 1. □

A questão que permanece é como poderíamos *justificar* o Axioma do Infinito. A resposta curta é que precisaremos de acrescentar outro princípio à história que vamos contando. Esse princípio é o seguinte:

> *Estágios-atingem-o-infinito.* Há um estágio infinito. Isto é, há um estágio que (a) não é o primeiro estágio, e que (b) tem alguns estágios antes de si, mas que (c) não tem predecessor imediato.

O Axioma do Infinito segue-se diretamente deste princípio. Sabemos que o número natural n se forma no estágio n. Logo o conjunto ω forma-se no primeiro estágio infinito. E o próprio ω testemunha o Axioma do Infinito.

Isto, porém, apenas nos leva de volta à questão de como justificar *Estágios-atingem-o-infinito*. Tal como *Estágios-prosseguem*, não fazia parte explícita da história que contamos sobre a hierarquia cumulativa iterativa. Mas mais do que isso: nada na própria ideia de uma hierarquia iterativa, em que os conjuntos se formam estágio a estágio, nos obriga a pensar que o processo envolve um estágio *infinito*. Parece perfeitamente coerente pensar que os estágios estão ordenados como os números naturais.

Isto, contudo, levanta um problema óbvio. Na **??**, consideramos a "prova" de Dedekind de que existe um conjunto infinito de Dedekind (de pensamentos). Isto poderá não lhe ter parecido muito satisfatório. Mas se *Estágios-atingem-o-infinito* não nos é "imposto" pela concepção iterativa de conjunto (nem pelas "leis do pensamento"), continuamos sem uma justificação intrínseca para a afirmação de que existe um conjunto infinito de Dedekind.

Há muito mais a dizer aqui, naturalmente. Mas esperamos que esteja agora num ponto em que possa começar a refletir sobre o que poderá *custar* justificar um axioma (ou um princípio). No que se segue tomaremos simplesmente *Estágios-atingem-o-infinito* como concedido.

z.7 $\mathbf{Z}^-$: um marco

sth:z:milestone:sec

Voltaremos a *Estágios-atingem-o-infinito* na parte seguinte. Contudo, com o Axioma do Infinito, atingimos um marco importante. Temos agora todos os axiomas necessários para a teoria $\mathbf{Z}^-$. Em detalhe:

Definição z.9. A teoria $\mathbf{Z}^-$ tem estes axiomas: Extensionalidade, União, Pares, Conjuntos potência, Infinito, e todas as instâncias do esquema de Separação.

O nome abrevia *Zermelo* (*menos* algo que abordaremos mais tarde). Zermelo merece a honra, pois formulou essencialmente esta teoria no seu trabalho de 1908.[3]

Esta teoria é bastante poderosa para permitir-nos fazer uma quantidade enorme de matemática. Em particular, *deverá* voltar atrás na **??** e convencer-se de que tudo o que fizemos, ingenuamente, pode ser feito de modo mais formal dentro de $\mathbf{Z}^-$. (Depois de o fazer durante algum tempo, poderá querer avançar e ler a Seção z.9.) Por isso, daqui em diante, e sem mais comentários, assumiremos estar a trabalhar em $\mathbf{Z}^-$ (pelo menos).

z.8 A escolher os números naturais

sth:z:nat:sec

Na Definição z.7, definimos explicitamente a expressão "números naturais". Como deve entender esta estipulação? Não é uma afirmação metafísica, mas apenas uma decisão de *tratar* certos conjuntos como os números naturais. Já abordamos razões para pensar assim na **??**, na **??** e na **??**. Mas podemos tornar essas razões ainda mais nítidas.

O nosso Axioma do Infinito segue von Neumann (1925). Mas eis outro axioma, que poderíamos ter adotado em alternativa:

> *Axioma do Infinito de Zermelo 1908.* Existe um conjunto A tal que $\emptyset \in A$ e $(\forall x \in A)\{x\} \in A$.

Se tivéssemos usado o axioma de Zermelo em vez do nosso Axioma do Infinito (inspirado em von Neumann), ter-nos-iam sido dado igualmente um conjunto infinito de Dedekind e, portanto, uma álgebra de Dedekind. Na abordagem de Zermelo, o elemento distinguido da nossa álgebra seria de novo $\emptyset$ (o nosso sucedâneo de 0), mas a injeção seria dada pela aplicação $x \mapsto \{x\}$, em vez de $x \mapsto x \cup \{x\}$. A consequência mais simples é que Zermelo trata 2 como $\{\{\emptyset\}\}$, ao passo que nós (com von Neumann) tratamos 2 como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Porquê escolher um axioma do Infinito em vez do outro? A razão prática principal é que a abordagem de von Neumann "escala" bastante bem para números transfinitos. Exploraremos isto a partir do **??** em diante. Porém, na simples perspectiva de *fazer aritmética*, ambas as abordagens serviriam igualmente bem. Por isso, se alguém lhe disser que os números naturais *são* conjuntos, a pergunta óbvia é: *Que conjuntos são eles?*

Esta pergunta precisa foi tornada célebre por Benacerraf (1965). Mas vale a pena sublinhar que é apenas o exemplo mais famoso de um fenómeno que já encontramos muitas vezes. O ponto essencial é este. A teoria dos conjuntos nos dá uma maneira de *simular* vários tipos de entidades "intuitivas": os reais, os racionais, os inteiros e os naturais, sim; mas também pares ordenados, funções e relações. Contudo, a teoria dos conjuntos nunca nos fornece uma escolha

[3] Para comentários interessantes sobre a história e os pormenores técnicos, veja Potter (2004, Apêndice A).

única de simulação. Há *sempre* alternativas que—de modo direto—nos teriam servido tão bem.

z.9 Apêndice: Fechamento, compreensão e interseção

sth:z:arbintersections:sec

Na Seção z.7, sugerimos que voltasse atrás no trabalho ingênuo da **??** e verificasse que este pode ser realizado em $\mathbf{Z}^-$. Se seguiu esse conselho, *um* ponto poderá tê-lo feito tropeçar: o uso da *interseção* no tratamento por Dedekind dos *fechamentos*.

Recordemos, de **??**, que

$$\mathrm{clo}_f(o) = \bigcap\{X : o \in X \text{ e } X \text{ é } f\text{-fechado}\}.$$

A forma geral disto é uma definição da forma:

$$C = \bigcap\{X : \varphi(X)\}.$$

Mas isto deve fazer soar o alarme: uma vez que a compreensão ingênua falha, não há garantia de que $\{X : \varphi(X)\}$ exista. Parece, então, perigosamente, que tais definições são *truques*.

Felizmente, não são truques; ou melhor, se *o forem* tal como estão, então podemos empenhar-nos honestamente para as tornar legítimas. Esse trabalho honesto foi antecipado na Proposição z.4, quando explicamos por que $\bigcap A$ existe para qualquer $A \neq \emptyset$. Mas vamos explicitá-lo.

Dada a Extensionalidade, se tentarmos definir C como $\bigcap\{X : \varphi(X)\}$, tudo o que realmente pedimos é um objeto C que satisfaça o seguinte:

sth:z:arbintersections:bicondelimarbintersection

$$\forall x(x \in C \leftrightarrow \forall X(\varphi(X) \to x \in X)) \tag{*}$$

Suponhamos, agora, que existe *algum* conjunto, S, tal que $\varphi(S)$. Então, para satisfazer Eq. (*), podemos simplesmente definir C por *Separação*, do seguinte modo:

$$C = \{x \in S : \forall X(\varphi(X) \to x \in X)\}.$$

Deixamos como exercício verificar que esta definição produz Eq. (*), como desejado. E esta estratégia geral permitir-nos-á contornar qualquer uso aparente da compreensão ingênua na definição de interseções. No caso particular que nos levou a esta linha de raciocínio, nomeadamente o de $\mathrm{clo}_f(o)$, eis como isso funcionaria. Começamos a prova de **??** ao notar que $o \in \mathrm{Im}(f) \cup \{o\}$ e que $\mathrm{Im}(f) \cup \{o\}$ é f-fechado. Assim, podemos definir o que queremos assim:

$$\mathrm{clo}_f(o) = \{x \in \mathrm{Im}(f) \cup \{o\} : (\forall X \ni o)(X \text{ é } f\text{-fechado} \to x \in X)\}.$$

Créditos das Imagens

z rev: 51c2271 (2026-07-12) por OLP / CC–BY.

Referências Bibliográficas

Benacerraf, Paul. 1965. What numbers could not be. *The Philosophical Review* 74(1): 47–73.

Button, Tim. 2021. Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27(4): 436–460.

Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.

Scott, Dana. 1974. Axiomatizing set theory. In *Axiomatic Set Theory II*, ed. Thomas Jech, 207–14. American Mathematical Society. Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, July–August 1967.

von Neumann, John. 1925. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154: 219–40.

Zermelo, Ernst. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen* 65: 261–81.