

z.1 Separação

sth:z:sep: Começamos com um princípio que substitui a compreensão ingênua:
sec

Esquema de Separação (Esquema de Separação). Para cada fórmula $\varphi(x)$, isto é um axioma: para qualquer A , o conjunto $\{x \in A : \varphi(x)\}$ existe.

Note que isto não é um único axioma. É um *esquema* de axiomas. Há *infinitamente muitos* axiomas de Separação; um para cada fórmula $\varphi(x)$. O esquema pode igualmente ser (e normalmente é) escrito do seguinte modo:

Para qualquer fórmula $\varphi(x)$ que não contenha “ S ”, isto é um axioma:

$$\forall A \exists S \forall x (x \in S \leftrightarrow (\varphi(x) \wedge x \in A)).$$

Em conformidade com a convenção assinalada no início da ??, as fórmulas φ nos axiomas de Separação podem ter parâmetros.¹

A Separação justifica-se de imediato pela concepção cumulativa iterativa de conjuntos que vamos expando. Para ver por que, seja A um conjunto. Então A forma-se por algum estágio S (por *Estágios-são-chave*). Uma vez que A se formou no estágio S , todos os membros de A formaram-se antes do estágio S (por *Estágios-acumulam*). Consideremos em particular todos os conjuntos que são membros de A e que também satisfazem φ ; claramente todos estes conjuntos também se formaram antes do estágio S . Logo formam-se num conjunto $\{x \in A : \varphi(x)\}$ também no estágio S (por *Estágios-acumulam*).

Ao contrário da compreensão ingênua, isto evita o paradoxo de Russell. Pois não podemos simplesmente afirmar a existência do conjunto $\{x : x \notin x\}$. Pelo contrário, *dado* algum conjunto A , podemos afirmar a existência do conjunto $R_A = \{x \in A : x \notin x\}$. Mas isto só prova que $R_A \notin R_A$ e $R_A \notin A$, o que não é preocupante.

Contudo, a Separação tem uma consequência imediata e marcante:

sth:z:sep: **Teorema z.1.** *Não existe conjunto universal, isto é, $\{x : x = x\}$ não existe.*
thm:NoUniversalSet

Prova. Por redução ao absurdo, suponhamos que V é um conjunto universal. Então, por Separação, $R = \{x \in V : x \notin x\} = \{x : x \notin x\}$ existe, o que contradiz o paradoxo de Russell. $\square$

A ausência de um conjunto universal—de fato, a abertura da hierarquia de conjuntos—é uma das ideias mais fundamentais por detrás da concepção cumulativa iterativa. Por isso vale a pena ver que, intuitivamente, poderíamos chegar lá por outro caminho. Um conjunto universal teria de ser **um membro** de si próprio. Mas, na nossa concepção cumulativa iterativa, cada conjunto

¹Para uma explicação do que isto significa, veja a discussão imediatamente a seguir a ??.

aparece (pela primeira vez) na hierarquia no primeiro estágio imediatamente a seguir a todos os seus **membros**. Isto implica que *nenhum* conjunto pertence a si próprio. Pois qualquer conjunto que pertencesse a si próprio teria de ocorrer pela primeira vez imediatamente depois do estágio em que ocorreu pela primeira vez, o que é absurdo. (Veremos na ?? como tornar esta explicação mais rigorosa, usando a noção de “posto” de um conjunto. Contudo, precisaremos de mais alguns axiomas para o fazer.)

Eis mais algumas consequências da Separação e da Extensionalidade.

Proposição z.2. *Se existe algum conjunto, então $\emptyset$ existe.*

*sth:z:sep:
prop:emptyexists*

Prova. Se A é um conjunto, $\emptyset = \{x \in A : x \neq x\}$ existe por Separação. $\square$

Proposição z.3. *$A \setminus B$ existe quaisquer que sejam os conjuntos A e B*

Prova. $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ existe por Separação. $\square$

Também se verifica que existem (quase) interseções arbitrárias:

Proposição z.4. *Se $A \neq \emptyset$, então $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A)x \in y\}$ existe.*

*sth:z:sep:
prop:intersectionexist*

Prova. Seja $A \neq \emptyset$, logo existe algum $c \in A$. Então $\bigcap A = \{x : (\forall y \in A)x \in y\} = \{x \in c : (\forall y \in A)x \in y\}$, que existe por Separação. $\square$

Note, porém, a condição de que $A \neq \emptyset$; pois $\bigcap \emptyset$ seria o conjunto universal, vacuamente, o que contradiz **Teorema z.1**.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas