

z.1 Conjuntos potência

sth:z:power:
sec Prosseguiremos com outro axioma:

Conjuntos potência (Conjuntos potência). Para qualquer conjunto A , existe o conjunto $\wp(A) = \{x : x \subseteq A\}$.

$$\forall A \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (\forall z \in x) z \in A)$$

A nossa justificação é bastante direta. Suponhamos que A se forma no estágio S . Então todos os membros de A estavam disponíveis antes de S (por *Estágios-acumulam*). Logo, raciocinando como na justificação da Separação, cada subconjunto de A forma-se até ao estágio S . Estão todos disponíveis, para serem reunidos num único conjunto, em qualquer estágio depois de S . E sabemos que existe algum tal estágio, pois S não é o último estágio (por *Estágios-prosseguem*). Logo $\wp(A)$ existe.

Eis uma boa consequência dos conjuntos potência:

Proposição z.1. *Dados quaisquer conjuntos A, B , o seu produto cartesiano $A \times B$ existe.*

Prova. O conjunto $\wp(\wp(A \cup B))$ existe por Conjuntos potência e ???. Logo, por Separação, existe este conjunto:

$$C = \{z \in \wp(\wp(A \cup B)) : (\exists x \in A)(\exists y \in B) z = \langle x, y \rangle\}.$$

Agora, para quaisquer $x \in A$ e $y \in B$, o conjunto $\langle x, y \rangle$ existe por ???. Além disso, uma vez que $x, y \in A \cup B$, temos $\{x\}, \{x, y\} \in \wp(A \cup B)$, e $\langle x, y \rangle \in \wp(\wp(A \cup B))$. Logo $A \times B = C$. $\square$

Nesta prova, o axioma dos conjuntos potência interage com a Separação. E isso não surpreende. Sem Separação, o princípio dos conjuntos potência não seria muito *poderoso*. Afinal, a Separação nos diz que subconjuntos de um conjunto existem e, por conseguinte, determina quão “gordo” é cada conjunto potência.

Problema z.1. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos A, B : (i) existe o conjunto de todas as relações com domínio A e contradomínio B ; e (ii) existe o conjunto de todas as funções de A para B .

Problema z.2. Seja A um conjunto, e seja $\sim$ uma relação de equivalência em A . Prove que existe o conjunto das classes de equivalência sob $\sim$ em A , isto é, $A/\sim$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas