

z.1 Pares

sth:z:pairs:
sec O próximo axioma a considerar é o seguinte:

Pares (Pares). Quaisquer que sejam os conjuntos a, b , o conjunto $\{a, b\}$ existe.

$$\forall a \forall b \exists P \forall x (x \in P \leftrightarrow (x = a \vee x = b))$$

Eis como justificar este axioma à luz da concepção iterativa. Suponhamos que a está disponível no estágio S , e b no estágio T . Seja M o que quer que seja dos estágios S e T que ocorre mais tarde. Então, uma vez que a e b estão ambos disponíveis no estágio M , o conjunto $\{a, b\}$ é uma coleção possível disponível em qualquer estágio depois de M (o que quer que seja o posterior).

Mas espera! Porquê assumir que *existem* estágios depois de M ? Se não existir nenhum, a nossa justificação falha. Por isso, para justificar Pares, teremos de acrescentar outro princípio à história que contamos na ??, nomeadamente:

Estágios-prosseguem. Não há último estágio.

Este princípio está justificado? Nada na história de Shoenfield afirmava *explicitamente* que não há último estágio. Ainda assim, mesmo que seja (estritamente falando) um acréscimo à nossa história, encaixa bem na ideia básica de que os conjuntos se formam em estágios. Aceitá-lo-emos simplesmente no que se segue. E, assim, aceitaremos também o Axioma dos Pares.

Armados com este novo axioma, podemos provar a existência de muitos mais conjuntos. Por exemplo:

sth:z:pairs:
prop:pairsconsequences **Proposição z.1.** *Quaisquer que sejam os conjuntos a e b , existem os seguintes conjuntos:*

- sth:z:pairs:
singleton 1. $\{a\}$
- sth:z:pairs:
binunion 2. $a \cup b$
- sth:z:pairs:
tuples 3. $\langle a, b \rangle$

Prova. (1). Por Pares, $\{a, a\}$ existe, o que é $\{a\}$ por Extensionalidade.

(2). Por Pares, $\{a, b\}$ existe. Ora, $a \cup b = \bigcup \{a, b\}$ existe por União.

(3). Por (1), $\{a\}$ existe. Por Pares, $\{a, b\}$ existe. Ora, $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \langle a, b \rangle$ existe, de novo por Pares. $\square$

Problema z.1. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos a, b, c , o conjunto $\{a, b, c\}$ existe.

Problema z.2. Mostre que, quaisquer que sejam os conjuntos $a_1, \dots, a_n$, o conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$ existe.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas