

z.1 A escolher os números naturais

sth:z:nat:
sec

Na ??, definimos explicitamente a expressão “números naturais”. Como deve entender esta estipulação? Não é uma afirmação metafísica, mas apenas uma decisão de *tratar* certos conjuntos como os números naturais. Já abordamos razões para pensar assim na ??, na ?? e na ??. Mas podemos tornar essas razões ainda mais nítidas.

O nosso Axioma do Infinito segue von Neumann (1925). Mas eis outro axioma, que poderíamos ter adotado em alternativa:

Axioma do Infinito de Zermelo 1908. Existe um conjunto A tal que $\emptyset \in A$ e $(\forall x \in A)\{x\} \in A$.

Se tivéssemos usado o axioma de Zermelo em vez do nosso Axioma do Infinito (inspirado em von Neumann), ter-nos-iam sido dado igualmente um conjunto infinito de Dedekind e, portanto, uma álgebra de Dedekind. Na abordagem de Zermelo, o elemento distinguido da nossa álgebra seria de novo $\emptyset$ (o nosso sucedâneo de 0), mas a injeção seria dada pela aplicação $x \mapsto \{x\}$, em vez de $x \mapsto x \cup \{x\}$. A consequência mais simples é que Zermelo trata 2 como $\{\{\emptyset\}\}$, ao passo que nós (com von Neumann) tratamos 2 como $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Porquê escolher um axioma do Infinito em vez do outro? A razão prática principal é que a abordagem de von Neumann “escala” bastante bem para números transfinitos. Exploraremos isto a partir do ?? em diante. Porém, na simples perspectiva de *fazer aritmética*, ambas as abordagens serviriam igualmente bem. Por isso, se alguém lhe disser que os números naturais *são* conjuntos, a pergunta óbvia é: *Que conjuntos são eles?*

Esta pergunta precisa foi tornada célebre por Benacerraf (1965). Mas vale a pena sublinhar que é apenas o exemplo mais famoso de um fenómeno que já encontramos muitas vezes. O ponto essencial é este. A teoria dos conjuntos nos dá uma maneira de *simular* vários tipos de entidades “intuitivas”: os reais, os racionais, os inteiros e os naturais, sim; mas também pares ordenados, funções e relações. Contudo, a teoria dos conjuntos nunca nos fornece uma escolha *única* de simulação. Há *sempre* alternativas que—de modo direto—nos teriam servido tão bem.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Benacerraf, Paul. 1965. What numbers could not be. *The Philosophical Review* 74(1): 47–73.

von Neumann, John. 1925. Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154: 219–40.

Zermelo, Ernst. 1908. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre
I. *Mathematische Annalen* 65: 261–81.