

z.1 Infinito

sth:z:infinity-again:
sec

Já temos axiomas suficientes para garantir que há infinitamente muitos conjuntos (se é que existe algum). De fato, suponhamos que algum conjunto existe; então $\emptyset$ existe (por ??). Agora, para qualquer conjunto x , o conjunto $x \cup \{x\}$ existe por ??. Logo, aplicando isto algumas vezes, obtemos conjuntos como se segue:

0. $\emptyset$
1. $\{\emptyset\}$
2. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

e podemos verificar que cada um destes conjuntos é distinto.

Começamos a numeração em 0, por várias razões. Mas uma delas é esta. Não é difícil verificar que o conjunto que rotulamos “ n ” tem exatamente n membros e que (intuitivamente) se forma no n -ésimo estágio.

Contudo. Isto nos dá *infinitamente muitos* conjuntos, mas não garante que exista um conjunto *infinito*, isto é, um conjunto com infinitamente muitos membros. E isto importa de veras: a menos que encontremos um conjunto infinito de Dedekind, não podemos construir uma álgebra de Dedekind. Mas queremos uma álgebra de Dedekind, para a podermos tratar como o conjunto dos números naturais. (Compare-se com ??.)

Importa que os axiomas que estabelecemos até aqui *não* garantem a existência de nenhum conjunto infinito. Por isso temos de enunciar um novo axioma:

Infinito (Infinito). Existe um conjunto, I , tal que $\emptyset \in I$ e $x \cup \{x\} \in I$ sempre que $x \in I$.

$$\exists I((\exists o \in I) \forall x (x \notin o \wedge (\forall x \in I)(\exists s \in I) \forall z (z \in s \leftrightarrow (z \in x \vee z = x))))$$

É fácil ver que o conjunto I que nos é dado pelo Axioma do Infinito é infinito de Dedekind. O seu elemento distinguido é $\emptyset$, e a injeção em I é dada por $s(x) = x \cup \{x\}$. Agora, ?? mostrou como extrair uma álgebra de Dedekind de um conjunto infinito de Dedekind; e trataremos isso como o nosso conjunto de números naturais. Mais precisamente:

sth:z:infinity-again:
defnomega

Definição z.1. Seja I qualquer conjunto que nos seja dado pelo Axioma do Infinito. Seja s a função $s(x) = x \cup \{x\}$. Seja $\omega = \text{clo}_s(\emptyset)$. Chamamos *números naturais* aos membros de ω , e dizemos que n é o resultado de n aplicações de s a $\emptyset$.

Pode agora voltar atrás e verificar que o conjunto rotulado “ n ”, há uns parágrafos, será tratado *como* o número n .

Discutiremos o significado desta estipulação na ???. Por ora, permite-nos provar um resultado intuitivo:

Proposição z.2. *Nenhum número natural é infinito de Dedekind.*

*sth::infinity-again:
naturalnumbersarentinfinite*

Prova. A prova é por indução, isto é, ???. Claramente $0 = \emptyset$ não é infinito de Dedekind. Para o passo indutivo, estabeleceremos a contrapositiva: se (absurdamente) $s(n)$ for infinito de Dedekind, então n é infinito de Dedekind.

Suponhamos, pois, que $s(n)$ é infinito de Dedekind, isto é, que existe alguma *injeção* f com $\text{Im}(f) \subsetneq \text{dom}(f) = s(n) = n \cup \{n\}$. Há dois casos a considerar.

Caso 1: $n \notin \text{Im}(f)$. Então $\text{Im}(f) \subseteq n$, e $f(n) \in n$. Seja $g = f|_n$; agora $\text{Im}(g) = \text{Im}(f) \setminus \{f(n)\} \subsetneq n = \text{dom}(g)$. Logo n é infinito de Dedekind.

Caso 2: $n \in \text{Im}(f)$. Fixemos $m \in \text{dom}(f) \setminus \text{Im}(f)$, e definamos uma função h com domínio $s(n) = n \cup \{n\}$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \neq n \\ m & \text{se } f(x) = n \end{cases}$$

Assim h e f coincidem em toda a parte, exceto que $h(f^{-1}(n)) = m \neq n = f(f^{-1}(n))$. Uma vez que f é *uma injeção*, $n \notin \text{Im}(h)$; e $\text{Im}(h) \subsetneq \text{dom}(h) = s(n)$. Logo n é infinito de Dedekind, pelo argumento do Caso 1. $\square$

A questão que permanece é como poderíamos *justificar* o Axioma do Infinito. A resposta curta é que precisaremos de acrescentar outro princípio à história que vamos contando. Esse princípio é o seguinte:

Estágios-atingem-o-infinito. Há um estágio infinito. Isto é, há um estágio que (a) não é o primeiro estágio, e que (b) tem alguns estágios antes de si, mas que (c) não tem predecessor imediato.

O Axioma do Infinito segue-se diretamente deste princípio. Sabemos que o número natural n se forma no estágio n . Logo o conjunto ω forma-se no primeiro estágio infinito. E o próprio ω testemunha o Axioma do Infinito.

Isto, porém, apenas nos leva de volta à questão de como justificar *Estágios-atingem-o-infinito*. Tal como *Estágios-prosseguem*, não fazia parte explícita da história que contamos sobre a hierarquia cumulativa iterativa. Mas mais do que isso: nada na própria ideia de uma hierarquia iterativa, em que os conjuntos se formam estágio a estágio, nos obriga a pensar que o processo envolve um estágio *infinito*. Parece perfeitamente coerente pensar que os estágios estão ordenados como os números naturais.

Isto, contudo, levanta um problema óbvio. Na ??, consideramos a “prova” de Dedekind de que existe um conjunto infinito de Dedekind (de pensamentos). Isto poderá não lhe ter parecido muito satisfatório. Mas se *Estágios-atingem-o-infinito* não nos é “imposto” pela concepção iterativa de conjunto (nem pelas

“leis do pensamento”), continuamos sem uma justificação intrínseca para a afirmação de que existe um conjunto infinito de Dedekind.

Há muito mais a dizer aqui, naturalmente. Mas esperamos que esteja agora num ponto em que possa começar a refletir sobre o que poderá *custar* justificar um axioma (ou um princípio). No que se segue tomaremos simplesmente *Estágios-atingem-o-infinito* como concedido.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas