

z.1 Apêndice: Fechamento, compreensão e interseção

sth::z:arbintersections:
sec

Na ??, sugerimos que voltasse atrás no trabalho ingênuo da ?? e verificasse que este pode ser realizado em $\mathbf{Z}^-$. Se seguiu esse conselho, *um* ponto poderá tê-lo feito tropeçar: o uso da *interseção* no tratamento por Dedekind dos *fechamentos*.

Recordemos, de ??, que

$$\text{clo}_f(o) = \bigcap \{X : o \in X \text{ e } X \text{ é } f\text{-fechado}\}.$$

A forma geral disto é uma definição da forma:

$$C = \bigcap \{X : \varphi(X)\}.$$

Mas isto deve fazer soar o alarme: uma vez que a compreensão ingênua falha, não há garantia de que $\{X : \varphi(X)\}$ exista. Parece, então, perigosamente, que tais definições são *truques*.

Felizmente, não são truques; ou melhor, se *o forem* tal como estão, então podemos empenhar-nos honestamente para as tornar legítimas. Esse trabalho honesto foi antecipado na ??, quando explicamos por que $\bigcap A$ existe para qualquer $A \neq \emptyset$. Mas vamos explicitá-lo.

Dada a Extensionalidade, se tentarmos definir C como $\bigcap \{X : \varphi(X)\}$, tudo o que realmente pedimos é um objeto C que satisfaça o seguinte:

$$\forall x(x \in C \leftrightarrow \forall X(\varphi(X) \rightarrow x \in X)) \quad (*)$$

sth::z:arbintersections:
bicondelimarbintersection

Suponhamos, agora, que existe *algum* conjunto, S , tal que $\varphi(S)$. Então, para satisfazer Eq. (*), podemos simplesmente definir C por *Separação*, do seguinte modo:

$$C = \{x \in S : \forall X(\varphi(X) \rightarrow x \in X)\}.$$

Deixamos como exercício verificar que esta definição produz Eq. (*), como desejado. E esta estratégia geral permitir-nos-á contornar qualquer uso aparente da compreensão ingênua na definição de interseções. No caso particular que nos levou a esta linha de raciocínio, nomeadamente o de $\text{clo}_f(o)$, eis como isso funcionaria. Começamos a prova de ?? ao notar que $o \in \text{Im}(f) \cup \{o\}$ e que $\text{Im}(f) \cup \{o\}$ é f -fechado. Assim, podemos definir o que queremos assim:

$$\text{clo}_f(o) = \{x \in \text{Im}(f) \cup \{o\} : (\forall X \ni o)(X \text{ é } f\text{-fechado} \rightarrow x \in X)\}.$$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas