

## Capítulo udf

# A Concepção Iterativa

### story.1 Extensionalidade

sth:story:extensionality:  
sec

O primeiro ponto a notar é que os conjuntos são individuados pelos seus **mem-bros**. Mais precisamente:

**Extensionalidade (Extensionalidade)**. Se os conjuntos  $A$  e  $B$  têm os mesmos **membros**, então  $A$  e  $B$  são o mesmo conjunto.

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \rightarrow A = B)$$

Assumimos isto ao longo de ???. Mas vale a pena repetir. O axioma de extensionalidade exprime a ideia fundamental de que um conjunto é determinado pelos seus **membros**. (Assim, os conjuntos podem contrastar-se com os *conceitos*, nos quais precisamente os mesmos objetos podem cair sob muitos conceitos diferentes.)

Por que aceitar este princípio? Ora, é plausível dizer que qualquer recusa da extensionalidade é uma decisão de abandonar tudo o que possa ser chamado *teoria dos conjuntos*. A teoria dos conjuntos não é mais nem menos do que a teoria de coleções extensionais.

O verdadeiro desafio na ???, contudo, é estabelecer princípios que nos digam *que conjuntos existem*. E acaba por se verificar que a única resposta verdadeiramente “óbvia” a esta questão é provadamente errada.

### story.2 Paradoxo de Russell (de novo)

sth:story:rus:  
sec

Na ???, trabalhamos com uma teoria ingênua dos conjuntos. Mas, segundo uma concepção *muito* ingênua, os conjuntos são apenas as extensões dos predicados. Este pensamento ingênuo imporia o seguinte princípio:

*Compreensão ingênua.*  $\{x : \varphi(x)\}$  existe para qualquer fórmula  $\varphi$ .

Por tentador que seja este princípio, é provadamente inconsistente. Vimo-lo na ??, mas o resultado é tão importante, e tão direto, que vale a pena repetir. Ipsis verbis.

**Teorema story.1 (Paradoxo de Russell).** *Não existe conjunto  $R = \{x : x \notin x\}$*

*Prova.* Se  $R = \{x : x \notin x\}$  existisse, então  $R \in R$  sse  $R \notin R$ , o que é uma contradição.  $\square$

Russell descobriu este resultado em junho de 1901. (Não colocou, porém, o paradoxo exatamente na forma em que o acabamos de apresentar, pois estava a considerar a teoria dos conjuntos de Frege, tal como delineada em *Grundgesetze*. Voltaremos a isto na [Seção story.6](#).) Russell escreveu a Frege a 16 de junho de 1902, explicando a inconsistência no sistema de Frege. Para a correspondência, e um pouco de contexto, ver [Heijenoort \(1967, pp. 124–8\)](#).

Vale a pena enfatizar que esta prova de duas linhas é um resultado de *lógica pura*. De fato, usamos implicitamente um axioma (não lógico?) de extensionalidade na nossa notação  $\{x : x \notin x\}$ ; pois  $\{x : \varphi(x)\}$  deve ser o *único* (pela extensionalidade) conjunto dos  $\varphi$ s, se algum existir. Mas podemos evitar até o vestígio da extensionalidade, bastando enunciar o resultado assim: *não existe conjunto cujos membros sejam exatamente os conjuntos que não são membros de si próprios*. E isto pouco tem a ver com conjuntos. Como o próprio Russell observou, raciocínio rigorosamente análogo leva-nos a concluir: *nenhum homem barbeia exatamente os homens que não se barbeiam a si próprios*. Ou: *nenhum pug cheira exatamente os pugs que não se cheiram a si próprios*. E assim por diante. Esquemáticamente, a forma do resultado é apenas:

$$\neg \exists x \forall z (Rzx \leftrightarrow \neg Rzz).$$

E isto não passa de um teorema (esquema) da lógica de primeira ordem. Consequentemente, não podemos evitar o paradoxo de Russell apenas mexendo na nossa teoria dos conjuntos; ele surge antes sequer de *chegarmos* à teoria dos conjuntos. Se formos usar lógica (clássica) de primeira ordem, temos simplesmente de *aceitar* que não existe conjunto  $R = \{x : x \notin x\}$ .

A consequência é esta. Se quisermos aceitar a compreensão ingênua enquanto *evitamos* a inconsistência, não basta mexer na *teoria dos conjuntos*. Teríamos, em vez disso, de reformular a nossa *lógica*.

É claro que já foram apresentadas teorias dos conjuntos com lógicas não clássicas. Mas são—no mínimo—não standard. A abordagem usual ao paradoxo de Russell é tratá-lo como uma prova direta de não existência e depois tentar aprender a viver com ela. É essa a abordagem que seguiremos.

### story.3 Predicativo e Impredicativo

O conjunto de Russell,  $R$ , foi definido via  $\{x : x \notin x\}$ . Dito com mais detalhe,  $R$  seria o conjunto que contém todos e apenas aqueles conjuntos que não são

sth:story:predicative:  
sec

membros de si próprios. Assim, ao definir  $R$ , quantificamos sobre o domínio que conteria  $R$  (se este existisse).

Isto é uma definição *impredicativa*. Mais em geral, podemos dizer que uma definição é impredicativa sse quantifica sobre um domínio que contém o objeto que está a ser definido.

Na sequência dos paradoxos, Whitehead, Russell, Poincaré e Weyl rejeitaram tais definições impredicativas como “viciosamente circulares”:

Uma análise dos paradoxos a evitar mostra que todos eles resultam de uma espécie de círculo vicioso. Os círculos viciosos em questão surgem ao supor que uma coleção de objetos pode conter membros que só podem ser definidos por meio da coleção como um todo[...]

¶

O princípio que nos permite evitar totalidades ilegítimas pode enunciar-se do seguinte modo: “Tudo o que envolve *todos* os membros de uma coleção não pode ser um dos membros da coleção”; ou, inversamente: “Se, supondo que uma certa coleção tivesse um todo, ela teria membros só definíveis em termos desse todo, então a dita coleção não tem todo.” Chamaremos a isto o “princípio do círculo vicioso”, porque nos permite evitar os círculos viciosos envolvidos na suposição de totalidades ilegítimas. (Whitehead and Russell, 1910, p. 37)

Se os acompanharmos na rejeição das definições impredicativas motivada pelo *princípio do círculo vicioso*, então podemos tentar substituir o desastroso esquema de compreensão ingênua (de [Seção story.2](#)) por algo deste gênero:

*Compreensão predicativa.* Para toda a fórmula  $\varphi$  que quantifica apenas sobre conjuntos: existe o conjunto'  $\{x : \varphi(x)\}$ .

Enquanto os conjuntos' não forem conjuntos, não se seguirá contradição.

Infelizmente, a compreensão predicativa não é muito *abrangente*. Afinal, introduz-nos novas entidades, conjuntos'. Logo teremos de considerar fórmulas que quantificam sobre conjuntos'. Se estas derem sempre um conjunto', então o paradoxo de Russell surgirá de novo, bastando considerar o conjunto' de todos os conjuntos' que não são membros de si próprios. Assim, a seguir o mesmo fio de ideias, temos de dizer que uma fórmula que quantifica sobre conjuntos' produz um conjunto'' correspondente. E então precisaremos de conjuntos''', conjuntos''', etc. Para evitar uma enxurrada de primos, será mais fácil pensar nestes como conjuntos<sub>0</sub>, conjuntos<sub>1</sub>, conjuntos<sub>2</sub>, conjuntos<sub>3</sub>, conjuntos<sub>4</sub>,... E isto dar-nos-ia entrada na teoria (simples) dos tipos.

Há algumas objeções óbvias a tal teoria (embora não seja óbvio que sejam objeções *esmagadoras*). Em resumo: a teoria resultante é pouco manejável; é prolixa ao postular diferentes tipos de objetos; e não está claro, no fim, que as definições impredicativas sejam sequer *assim tão más*.

Para ilustrar o último ponto, consideremos esta observação de Ramsey:

podemos referir-nos a um homem como o mais alto de um grupo, identificando-o por meio de uma totalidade da qual ele próprio é membro sem que haja círculo vicioso. (Ramsey, 1925)

O ponto de Ramsey é que “o homem mais alto do grupo” é uma definição impredicativa; mas é obviamente perfeitamente legítima.

Alguém poderá responder que, neste caso, poderíamos identificar a pessoa mais alta por meios *predicativos*. Por exemplo, talvez pudéssemos simplesmente apontar para o homem em questão. A objeção às definições impredicativas, então, teria claramente de se limitar a entidades que *só* possam ser identificadas impredicativamente. Mas mesmo assim, seria preciso ouvir mais, sobre por que tal “impredicatividade essencial” seria tão grave.<sup>1</sup>

Admitidamente, as definições impredicativas são péssimas notícias, se quisermos que as definições nos forneçam algo como uma receita para *criar* um objeto. Pois, dada uma definição impredicativa, estar-se-ia genuinamente preso a um círculo vicioso: para criar o objeto especificado impredicativamente, seria preciso *primeiro* criar todos os objetos (incluindo o objeto especificado impredicativamente), uma vez que este é especificado em termos de todos os objetos; logo seria preciso criar o objeto especificado impredicativamente antes de o ter criado. Mas, de novo, isto só é uma objeção séria a conjuntos especificados de modo “essencialmente impredicativo”, se pensarmos nos conjuntos como coisas que *criamos*. E nós (provavelmente) não os criamos.

Assim—para o bem ou para o mal—a abordagem que se tornou comum não envolve tomar uma posição rígida sobre (im)predicatividade. Envolve antes o que hoje se considera a abordagem cumulativa-iterativa. No fim, isto permitir-nos-á estratificar os conjuntos em “estágios”—um *pouco* como a abordagem predicativa estratifica entidades em conjuntos<sub>0</sub>, conjuntos<sub>1</sub>, conjuntos<sub>2</sub>, ... —mas não postularemos diferença de natureza entre eles.

## story.4 A Abordagem Cumulativa-Iterativa

Eis um enunciado um pouco mais completo de como estratificaremos os conjuntos em estágios:

sth:story:approach:  
sec

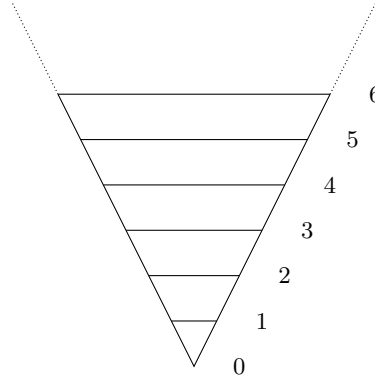
Os conjuntos formam-se em *estágios*. Para cada estágio  $S$ , há certos estágios que são *anteriores* a  $S$ . No estágio  $S$ , cada coleção constituída por conjuntos formados em estágios anteriores a  $S$  é formada num conjunto. Não há conjuntos além dos que são formados nos estágios. (Shoenfield, 1977, p. 323)

Isto é um esboço da *concepção cumulativa-iterativa do conjunto*. Servirá de base à teoria formal dos conjuntos que apresentamos em ??.

---

<sup>1</sup>Para mais, ver Linnebo (2010).

Exploremos isto com um pouco mais de detalhe. Como Shoenfield descreve o processo, em cada estágio formamos novos conjuntos a partir dos conjuntos que tínhamos disponíveis nos estágios anteriores. Assim, na imagem de Shoenfield, no estágio inicial, estágio 0, não há estágios *anteriores*, e portanto *a fortiori* não há conjuntos disponíveis a partir de estágios anteriores.<sup>2</sup> Logo formamos apenas um conjunto: o conjunto sem **membros**  $\emptyset$ . No estágio 1, está exatamente um conjunto disponível a partir de estágios anteriores, logo apenas um conjunto novo é  $\{\emptyset\}$ . No estágio 2, dois conjuntos estão disponíveis a partir de estágios anteriores, e formamos dois conjuntos novos  $\{\{\emptyset\}\}$  e  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ . No estágio 3, quatro conjuntos estão disponíveis a partir de estágios anteriores, logo formamos doze conjuntos novos. . . . Assim, a imagem cumulativa-iterativa dos conjuntos ficará algo assim (com números a indicar estágios):



Então: por que deveríamos aceitar esta narrativa?

Uma razão é que é uma narrativa agradável e tratável. Dado o fim da narrativa mais óbvia, isto é, a compreensão ingênua, precisamos de algo de substância.

Mas a narrativa não é *apenas* agradável. Temos boa razão para acreditar que qualquer teoria dos conjuntos baseada nesta narrativa será *consistente*. Eis a razão.

Dada a concepção cumulativa-iterativa do conjunto, formamos conjuntos em estágios; e os seus **membros** têm de ser objetos que já estavam disponíveis. Assim, para qualquer estágio  $S$ , podemos formar o conjunto

$$R_S = \{x : x \notin x \text{ e } x \text{ já estava disponível antes de } S\}$$

O raciocínio envolvido na prova do paradoxo de Russell estabelece agora que o próprio  $R_S$  não está disponível antes do estágio  $S$ . E isso não é uma contradição. Além disso, se aceitarmos a concepção cumulativa-iterativa do conjunto, nem sequer deveríamos ter *esperado* poder formar o próprio conjunto de Russell. Pois esse seria o conjunto de todos os conjuntos que não são membros

<sup>2</sup>Por que deveríamos supor que *existe* um primeiro estágio? Ver a nota de rodapé a *Estágios-são-ordenados* em ??.

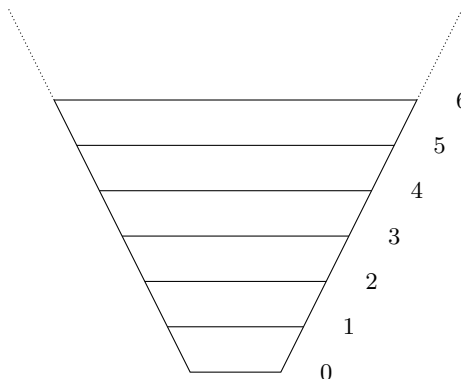
de si próprios que “alguma vez estarão disponíveis”. Em resumo: o fato de, provadamente, não podermos formar o conjunto de Russell não é *surpreendente*, dada a narrativa cumulativa-iterativa; é antes *previsível*.

## story.5 Urelementos ou Não?

Nos próximos capítulos, tentaremos extrair axiomas da concepção cumulativa-iterativa do conjunto. Mas, antes de avançar mais, precisamos de dizer algo mais sobre os *urelementos*.

sth:story:urelements:  
sec

A imagem de [Seção story.4](#) só nos permitia formar novos conjuntos a partir de *conjuntos* antigos. Contudo, podemos querer admitir que certos *não-conjuntos*—vacas, porcos, grãos de areia, ou o que seja—possam ser *membros* de conjuntos. Nesse caso, começaríamos com certos elementos básicos, *urelementos*, e diríamos que em cada estágio  $S$  formaríamos “todos os possíveis” conjuntos constituídos por urelementos ou conjuntos formados em estágios anteriores a  $S$  (em qualquer combinação). A imagem resultante parecer-se-ia mais com isto:



Temos pois uma decisão a tomar: *devemos admitir urelementos?*

Do ponto de vista filosófico, faz sentido incluir urelementos na nossa teorização. A principal razão é tornar a teoria dos conjuntos *aplicável*. Para ilustrar, recordemos de ?? que dizemos que dois conjuntos  $A$  e  $B$  têm o mesmo tamanho, isto é,  $A \approx B$ , sse existe uma bijeção entre eles. Agora, se as vacas no campo e os porcos no chiqueiro constituem ambos conjuntos, podemos oferecer um tratamento conjunto-teórico da afirmação “há tantas vacas como porcos”. Mas se proibirmos urelementos, de modo que as vacas e os porcos *não* constituem conjuntos, esse tratamento conjunto-teórico deixará de estar disponível. De fato, não teremos capacidade direta de aplicar a teoria dos conjuntos a mais nada além dos próprios conjuntos. (Para mais razões para incluir urelementos, ver [Potter 2004](#), pp. vi, 24, 50–1.)

Matematicamente, contudo, é bastante raro admitir urelementos. Em parte, porque é *ligeiramente* mais fácil formular a teoria dos conjuntos sem urelemen-

tos. Mas, ocasionalmente, encontram-se justificações mais interessantes para excluir urelementos da teoria dos conjuntos:

De acordo com a convicção de que a teoria dos conjuntos é o fundamento da matemática, devemos ser capazes de captar toda a matemática apenas falando de conjuntos, pelo que as nossas variáveis não devem quantificar sobre objetos como vacas e porcos. (Kunen, 1980, p. 8)

Assim: um foco na aplicabilidade sugeriria *incluir* urelementos; um foco num objetivo fundacional redutivo (reduzir a matemática à teoria pura dos conjuntos) poderia sugerir *excluí-los*. Uma ligeira preguiça também aponta no sentido de excluir urelementos.

Seguiremos o caminho mais preguiçoso. Em parte, há também uma justificação pedagógica. O nosso objetivo é introduzir os elementos da teoria dos conjuntos de que precisa para começar na filosofia da teoria dos conjuntos. E a maior parte dessa literatura filosófica discute teorias dos conjuntos formuladas *sem* urelementos. Logo este livro será, talvez, mais útil se se mantiver bastante próximo dessa literatura.

## story.6 Apêndice: Lei Básica V de Frege

sth:story:blv:  
sec

Na [Seção story.2](#), explicamos que Russell formulou o paradoxo como um problema para o sistema que Frege delineou nos seus *Grundgesetze*. O sistema de Frege não incluía uma formulação direta da compreensão ingênua. Logo, neste apêndice, explicaremos muito sumariamente o que o sistema de Frege *incluía*, como se relaciona com a compreensão ingênua e como se relaciona com o paradoxo de Russell.

O sistema de Frege é de *segunda ordem* e foi concebido para formular a noção de *extensão de um conceito*.<sup>3</sup> Usando notação inspirada em Frege, escreveremos  $\epsilon x F(x)$  para a *extensão do conceito*  $F$ . Este é um dispositivo que toma um *predicado*, “ $F$ ”, e transforma-o num *termo* (de primeira ordem), “ $\epsilon x F(x)$ ”. Com este dispositivo, Frege propôs a seguinte *definição* de pertença:

$$a \in b =_{\text{df}} \exists G(b = \epsilon x G(x) \wedge Ga)$$

grosso modo:  $a \in b$  sse  $a$  cai sob um conceito cuja extensão é  $b$ . (Note que o quantificador “ $\exists G$ ” é de segunda ordem.) Frege também sustentava o seguinte princípio, conhecido como *Lei básica V*:

$$\epsilon x F(x) = \epsilon x G(x) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

grosso modo: conceitos têm extensões idênticas sse são coextensivos. (De novo, tanto “ $F$ ” como “ $G$ ” estão em posição de predicado.) Um princípio simples liga agora a pertença à satisfação de propriedades:

<sup>3</sup>Estritamente falando, Frege tenta formalizar uma noção mais geral: o “valor de curso” de uma função. As extensões de conceitos são um caso especial da noção mais geral. Ver Heck (2012, pp. 8–9) para pormenores.

**Lema story.2 (em *Grundgesetze*).**  $\forall F \forall a (a \in \epsilon x F(x) \leftrightarrow Fa)$

*sth:story:blv:*  
*lem:Fregeextensions*

*Prova.* Fixe  $F$  e  $a$ . Ora  $a \in \epsilon x F(x)$  sse  $\exists G(\epsilon x F(x) = \epsilon x G(x) \wedge Ga)$  (pela definição de pertença) sse  $\exists G(\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \wedge Ga)$  (pela lei básica  $\forall$ ) sse  $Fa$  (por lógica elementar de segunda ordem).  $\square$

E disto resulta quase de imediato a compreensão ingênua:

**Lema story.3 (em *Grundgesetze*).**  $\forall F \exists s \forall a (a \in s \leftrightarrow Fa)$

*Prova.* Fixe  $F$ ; agora **Lema story.2** dá  $\forall a (a \in \epsilon x F(x) \leftrightarrow Fa)$ ; logo  $\exists s \forall a (a \in s \leftrightarrow Fa)$  por generalização existencial. O resultado segue-se, pois  $F$  era arbitrário.  $\square$

O paradoxo de Russell segue tomando  $F$  dado por  $\forall x(Fx \leftrightarrow x \notin x)$ .

## Créditos das Imagens

# Referências Bibliográficas

- Heck, Richard Kimberly. 2012. *Reading Frege's Grundgesetze*. Oxford: Oxford University Press.
- Heijenoort, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Kunen, Kenneth. 1980. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. New York: North Holland.
- Linnebo, Øystein. 2010. Predicative and impredicative definitions. *Internet Encyclopedia of Philosophy* URL <http://www.iep.utm.edu/predicat/>.
- Potter, Michael. 2004. *Set Theory and its Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
- Ramsey, Frank Plumpton. 1925. The foundations of mathematics. *Proceedings of the London Mathematical Society* 25: 338–384.
- Shoenfield, Joseph R. 1977. Axioms of set theory. In *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, 321–44. London: North-Holland.
- Whitehead, Alfred North and Bertrand Russell. 1910. *Principia Mathematica*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.