

story.1 Paradoxo de Russell (de novo)

sth:story:rus:
sec

Na ??, trabalhamos com uma teoria ingênua dos conjuntos. Mas, segundo uma concepção *muito* ingênua, os conjuntos são apenas as extensões dos predicados. Este pensamento ingênuo imporia o seguinte princípio:

Compreensão ingênua. $\{x : \varphi(x)\}$ existe para qualquer fórmula φ .

Por tentador que seja este princípio, é provadamente inconsistente. Vimo-lo na ??, mas o resultado é tão importante, e tão direto, que vale a pena repetir. Ipsi verbis.

Teorema story.1 (Paradoxo de Russell). *Não existe conjunto* $R = \{x : x \notin x\}$

Prova. Se $R = \{x : x \notin x\}$ existisse, então $R \in R$ sse $R \notin R$, o que é uma contradição. $\square$

Russell descobriu este resultado em junho de 1901. (Não colocou, porém, o paradoxo exatamente na forma em que o acabamos de apresentar, pois estava a considerar a teoria dos conjuntos de Frege, tal como delineada em *Grundgesetze*. Voltaremos a isto na ??.) Russell escreveu a Frege a 16 de junho de 1902, explicando a inconsistência no sistema de Frege. Para a correspondência, e um pouco de contexto, ver [Heijenoort \(1967, pp. 124–8\)](#).

Vale a pena enfatizar que esta prova de duas linhas é um resultado de *lógica pura*. De fato, usamos implicitamente um axioma (não lógico?) de extensionalidade na nossa notação $\{x : x \notin x\}$; pois $\{x : \varphi(x)\}$ deve ser o *único* (pela extensionalidade) conjunto dos φ s, se algum existir. Mas podemos evitar até o vestígio da extensionalidade, bastando enunciar o resultado assim: *não existe conjunto cujos membros sejam exatamente os conjuntos que não são membros de si próprios*. E isto pouco tem a ver com conjuntos. Como o próprio Russell observou, raciocínio rigorosamente análogo leva-nos a concluir: *nenhum homem barbeia exatamente os homens que não se barbeiam a si próprios*. Ou: *nenhum pug cheira exatamente os pugs que não se cheiram a si próprios*. E assim por diante. Esquemáticamente, a forma do resultado é apenas:

$$\neg \exists x \forall z (Rzx \leftrightarrow \neg Rzz).$$

E isto não passa de um teorema (esquema) da lógica de primeira ordem. Consequentemente, não podemos evitar o paradoxo de Russell apenas mexendo na nossa teoria dos conjuntos; ele surge antes sequer de *chegarmos* à teoria dos conjuntos. Se formos usar lógica (clássica) de primeira ordem, temos simplesmente de *aceitar* que não existe conjunto $R = \{x : x \notin x\}$.

A consequência é esta. Se quisermos aceitar a compreensão ingênua enquanto *evitamos* a inconsistência, não basta mexer na *teoria dos conjuntos*. Teríamos, em vez disso, de reformular a nossa *lógica*.

É claro que já foram apresentadas teorias dos conjuntos com lógicas não clássicas. Mas são—no mínimo—não standard. A abordagem usual ao paradoxo de Russell é tratá-lo como uma prova direta de não existência e depois tentar aprender a viver com ela. É essa a abordagem que seguiremos.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Heijenoort, Jean van. 1967. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge, MA: Harvard University Press.