

story.1 Apêndice: Lei Básica V de Frege

sth:story:blv:
sec

Na ??, explicamos que Russell formulou o paradoxo como um problema para o sistema que Frege delineou nos seus *Grundgesetze*. O sistema de Frege não incluía uma formulação direta da compreensão ingênua. Logo, neste apêndice, explicaremos muito sumariamente o que o sistema de Frege *incluía*, como se relaciona com a compreensão ingênua e como se relaciona com o paradoxo de Russell.

O sistema de Frege é de *segunda ordem* e foi concebido para formular a noção de *extensão de um conceito*.¹ Usando notação inspirada em Frege, escreveremos $\epsilon x F(x)$ para a *extensão do conceito* F . Este é um dispositivo que toma um *predicado*, “ F ”, e transforma-o num *termo* (de primeira ordem), “ $\epsilon x F(x)$ ”. Com este dispositivo, Frege propôs a seguinte *definição* de pertença:

$$a \in b =_{\text{df}} \exists G(b = \epsilon x G(x) \wedge Ga)$$

grosso modo: $a \in b$ sse a cai sob um conceito cuja extensão é b . (Note que o quantificador “ $\exists G$ ” é de segunda ordem.) Frege também sustentava o seguinte princípio, conhecido como *Lei básica V*:

$$\epsilon x F(x) = \epsilon x G(x) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

grosso modo: conceitos têm extensões idênticas sse são coextensivos. (De novo, tanto “ F ” como “ G ” estão em posição de predicado.) Um princípio simples liga agora a pertença à satisfação de propriedades:

sth:story:blv:
lem:Fregeextensions

Lema story.1 (em *Grundgesetze*). $\forall F \forall a(a \in \epsilon x F(x) \leftrightarrow Fa)$

Prova. Fixe F e a . Ora $a \in \epsilon x F(x)$ sse $\exists G(\epsilon x F(x) = \epsilon x G(x) \wedge Ga)$ (pela definição de pertença) sse $\exists G(\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \wedge Ga)$ (pela lei básica V) sse Fa (por lógica elementar de segunda ordem). $\square$

E disto resulta quase de imediato a compreensão ingênua:

Lema story.2 (em *Grundgesetze*). $\forall F \exists s \forall a(a \in s \leftrightarrow Fa)$

Prova. Fixe F ; agora **Lema story.1** dá $\forall a(a \in \epsilon x F(x) \leftrightarrow Fa)$; logo $\exists s \forall a(a \in s \leftrightarrow Fa)$ por generalização existencial. O resultado segue-se, pois F era arbitrário. $\square$

O paradoxo de Russell segue tomando F dado por $\forall x(Fx \leftrightarrow x \notin x)$.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Heck, Richard Kimberly. 2012. *Reading Frege's Grundgesetze*. Oxford: Oxford University Press.

¹Estritamente falando, Frege tenta formalizar uma noção mais geral: o “valor de curso” de uma função. As extensões de conceitos são um caso especial da noção mais geral. Ver Heck (2012, pp. 8–9) para pormenores.