

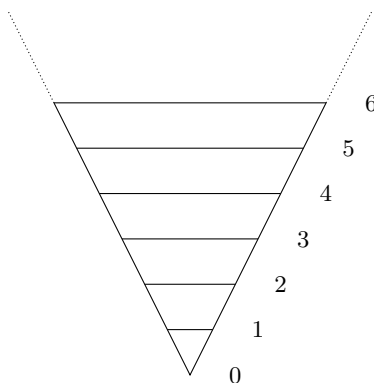
story.1 A Abordagem Cumulativa-Iterativa

sth:story:approach:sec Eis um enunciado um pouco mais completo de como estratificaremos os conjuntos em estágios:

Os conjuntos formam-se em *estágios*. Para cada estágio S , há certos estágios que são *anteriores* a S . No estágio S , cada coleção constituída por conjuntos formados em estágios anteriores a S é formada num conjunto. Não há conjuntos além dos que são formados nos estágios. (Shoenfield, 1977, p. 323)

Isto é um esboço da *concepção cumulativa-iterativa do conjunto*. Servirá de base à teoria formal dos conjuntos que apresentamos em ??.

Exploremos isto com um pouco mais de detalhe. Como Shoenfield descreve o processo, em cada estágio formamos novos conjuntos a partir dos conjuntos que tínhamos disponíveis nos estágios anteriores. Assim, na imagem de Shoenfield, no estágio inicial, estágio 0, não há estágios *anteriores*, e portanto *a fortiori* não há conjuntos disponíveis a partir de estágios anteriores.¹ Logo formamos apenas um conjunto: o conjunto sem membros $\emptyset$. No estágio 1, está exatamente um conjunto disponível a partir de estágios anteriores, logo apenas um conjunto novo é $\{\emptyset\}$. No estágio 2, dois conjuntos estão disponíveis a partir de estágios anteriores, e formamos dois conjuntos novos $\{\{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. No estágio 3, quatro conjuntos estão disponíveis a partir de estágios anteriores, logo formamos doze conjuntos novos. . . . Assim, a imagem cumulativa-iterativa dos conjuntos ficará algo assim (com números a indicar estágios):



Então: por que deveríamos aceitar esta narrativa?

Uma razão é que é uma narrativa agradável e tratável. Dado o fim da narrativa mais óbvia, isto é, a compreensão ingênua, precisamos de algo de substância.

¹Por que deveríamos supor que *existe* um primeiro estágio? Ver a nota de rodapé a *Estágios-são-ordenados* em ??.

Mas a narrativa não é *apenas* agradável. Temos boa razão para acreditar que qualquer teoria dos conjuntos baseada nesta narrativa será *consistente*. Eis a razão.

Dada a concepção cumulativa-iterativa do conjunto, formamos conjuntos em estágios; e os seus **membros** têm de ser objetos que já estavam disponíveis. Assim, para qualquer estágio S , podemos formar o conjunto

$$R_S = \{x : x \notin x \text{ e } x \text{ já estava disponível antes de } S\}$$

O raciocínio envolvido na prova do paradoxo de Russell estabelece agora que o próprio R_S não está disponível antes do estágio S . E isso não é uma contradição. Além disso, se aceitarmos a concepção cumulativa-iterativa do conjunto, nem sequer deveríamos ter *esperado* poder formar o próprio conjunto de Russell. Pois esse seria o conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios que “alguma vez estarão disponíveis”. Em resumo: o fato de, provadamente, não podermos formar o conjunto de Russell não é *surpreendente*, dada a narrativa cumulativa-iterativa; é antes *previsível*.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Shoenfield, Joseph R. 1977. Axioms of set theory. In *Handbook of Mathematical Logic*, ed. Jon Barwise, 321–44. London: North-Holland.