

spine.1 $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{ZF}$: um marco

sth:spine:zf:
sec

Com a Fundação, atingimos outro marco importante. Consideramos as teorias $\mathbf{Z}^-$ e $\mathbf{ZF}^-$, que dissemos ser certas teorias «menos» alguma coisa. Essa coisa é a Fundação. Logo:

Definição spine.1. A teoria $\mathbf{Z}$ acrescenta a Fundação a $\mathbf{Z}^-$. Os seus axiomas são Extensionalidade, União, Pares, Conjuntos das Partes, Infinito, Fundação, e todas as instâncias do esquema de Separação.

A teoria $\mathbf{ZF}$ acrescenta a Fundação a $\mathbf{ZF}^-$. Por outras palavras, $\mathbf{ZF}$ acrescenta todas as instâncias de Substituição a $\mathbf{Z}$.

Ainda assim, uma pergunta pode ter surgido. Se a Regularidade é equivalente sobre $\mathbf{ZF}^-$ à Fundação, e a justificação da Regularidade é clara, por que dar voltas e tomar a Fundação como axioma básico, em vez da Regularidade?

Deixando de lado razões históricas (quem formulou o quê e quando), a razão essencial é que a Fundação pode ser apresentada sem recorrer à definição dos V_α . Essa definição dependeu de todo o trabalho na ??: foi preciso provar a recursão transfinita, para mostrar que era legítima. Mas a nossa prova da recursão transfinita usou o *Esquema de Substituição*. Logo, embora a Fundação e a Regularidade sejam equivalentes módulo $\mathbf{ZF}^-$, não são equivalentes módulo $\mathbf{Z}^-$.

De fato, a questão é mais grave do que esta observação simples sugere. Embora ultrapasse o âmbito deste livro, verifica-se que tanto $\mathbf{Z}^-$ como $\mathbf{Z}$ são demasiado fracas para definir os V_α . Logo, se se trabalha apenas em $\mathbf{Z}$, então a Regularidade (tal como a formulamos) nem sequer faz *sentido*. É por isso que o nosso axioma oficial é a Fundação, e não a Regularidade.

Daqui em diante, trabalharemos em $\mathbf{ZF}$ (salvo indicação em contrário), sem mais comentários.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas