

spine.1 Propriedades básicas dos estágios

sth:spine:Valphabasic:
sec

Para evidenciar a importância fundacional da definição dos V_α , apresentaremos alguns resultados básicos sobre eles. Começamos com uma definição:¹

Definição spine.1. O conjunto A é *potente* sse $\forall x((\exists y \in A)x \subseteq y \rightarrow x \in A)$.

sth:spine:Valphabasic:
Valphabasicprops

Lema spine.2. Para cada ordinal α :

sth:spine:Valphabasic:
Valphatrans

1. Cada V_α é transitivo.

sth:spine:Valphabasic:
Valphapotent

2. Cada V_α é potente.

sth:spine:Valphabasic:
Valphacum

3. Se $\gamma \in \alpha$, então $V_\gamma \in V_\alpha$ (e portanto também $V_\gamma \subseteq V_\alpha$, por (1))

Prova. Provamos isto por indução transfinita (simultânea). Para a indução, supomos que (1)–(3) valem para cada ordinal $\beta < \alpha$.

O caso $\alpha = \emptyset$ é trivial.

Suponhamos $\alpha = \beta^+$. Para mostrar (3), se $\gamma \in \alpha$ então $V_\gamma \subseteq V_\beta$ por hipótese, logo $V_\gamma \in \wp(V_\beta) = V_\alpha$. Para mostrar (2), suponhamos $A \subseteq B \in V_\alpha$, isto é, $A \subseteq B \subseteq V_\beta$; então $A \subseteq V_\beta$, logo $A \in V_\alpha$. Para mostrar (1), notemos que se $x \in A \in V_\alpha$ temos $A \subseteq V_\beta$, logo $x \in V_\beta$, logo $x \subseteq V_\beta$ pois V_β é transitivo por hipótese, e assim $x \in V_\alpha$.

Suponhamos que α é um ordinal limite. Para mostrar (3), se $\gamma \in \alpha$ então $\gamma \in \gamma^+ \in \alpha$, de modo que $V_\gamma \in V_{\gamma^+}$ por hipótese, logo $V_\gamma \in \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta = V_\alpha$. Para mostrar (1) e (2), basta observar que uma união de conjuntos transitivos (respetivamente, potentes) é transitiva (respetivamente, potente). $\square$

sth:spine:Valphabasic:
Valphanotref

Lema spine.3. Para cada ordinal α , $V_\alpha \notin V_\alpha$.

Prova. Por indução transfinita. Evidentemente $V_\emptyset \notin V_\emptyset$.

Se $V_{\alpha^+} \in V_{\alpha^+} = \wp(V_\alpha)$, então $V_{\alpha^+} \subseteq V_\alpha$; e como $V_\alpha \in V_{\alpha^+}$ por Lema spine.2, temos $V_\alpha \in V_\alpha$. Reciprocamente: se $V_\alpha \notin V_\alpha$ então $V_{\alpha^+} \notin V_{\alpha^+}$.

Se α é limite e $V_\alpha \in V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, então $V_\alpha \in V_\beta$ para algum $\beta \in \alpha$; mas então também $V_\beta \in V_\alpha$, logo $V_\beta \in V_\beta$ por Lema spine.2 (duas vezes). Reciprocamente, se $V_\beta \notin V_\beta$ para todo o $\beta \in \alpha$, então $V_\alpha \notin V_\alpha$. $\square$

Corolário spine.4. Para quaisquer ordinais α, β : $\alpha \in \beta$ sse $V_\alpha \in V_\beta$

Prova. Lema spine.2 dá um sentido. Reciprocamente, suponhamos $V_\alpha \in V_\beta$. Então $\alpha \neq \beta$ por Lema spine.3; e $\beta \notin \alpha$, pois caso contrário teríamos $V_\beta \in V_\alpha$ e logo $V_\beta \in V_\beta$ por Lema spine.2 (duas vezes), contradizendo Lema spine.3. Logo $\alpha \in \beta$ por tricotomia. $\square$

¹Não há terminologia padrão para «potente»; este é o nome usado por Button (2021).

Tudo isto permite pensar em cada V_α como o α -ésimo estágio da hierarquia. Eis a razão.

Certamente os nossos V_α podem ser vistos como formados num processo *iterativo*, pois o uso de ordinais acompanha a noção de iteração. Além disso, se um estágio é formado antes do outro, isto é, $V_\beta \in V_\alpha$, isto é, $\beta \in \alpha$, então o nosso processo de formação é *cumulativo*, pois $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Finalmente, estamos de fato a formar *todas* as coleções possíveis de conjuntos que estavam disponíveis em qualquer estágio anterior, pois qualquer estágio sucessor $V_{\alpha+}$ é o conjunto potência do seu predecessor V_α .

Em resumo: com $\mathbf{ZF}^-$, estamos *quase* a terminar de articular a nossa visão da hierarquia cumulativa e iterativa de conjuntos. (Embora, naturalmente, ainda precisemos de justificar o Esquema de Substituição.)

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Button, Tim. 2021. Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27(4): 436–460.