

Capítulo udf

Estágios e postos

spine.1 Definindo os estágios como os V_α

sth:spine:valpha:
sec No ??, definimos boas ordenações e os ordinais (de von Neumann). Neste capítulo, usaremos isto para caracterizar a própria hierarquia de conjuntos. Para tal, recordemos que na ?? definimos a noção de ordinal sucessor e ordinal limite. Usamos estas ideias na definição seguinte:

sth:spine:valpha:
defValphas **Definição spine.1.**

$$\begin{aligned} V_\emptyset &= \emptyset \\ V_{\alpha+} &= \wp(V_\alpha) && \text{para qualquer ordinal } \alpha \\ V_\alpha &= \bigcup_{\gamma < \alpha} V_\gamma && \text{quando } \alpha \text{ é um ordinal limite} \end{aligned}$$

Será uma definição por *recursão transfinita* nos ordinais. A este respeito, convém comparar com definições recursivas de funções nos números naturais.¹ Como ao tratar dos números naturais, define-se um caso base e casos sucessor; mas ao tratar de ordinais, também precisamos de descrever o comportamento nos casos *limite*.

Esta definição dos V_α será um marco importante. Motivamos informalmente a nossa hierarquia de conjuntos como formando conjuntos por *estágios*. Os V_α são, em efeito, precisamente esses estágios. Importa, contudo, que se trata de uma caracterização *interna* dos estágios. Em vez de sugerir um possível *modelo* da teoria, teremos definido os estágios *dentro* da nossa teoria dos conjuntos.

spine.2 Teorema(s) de recursão transfinita

sth:spine:recursion:
sec O primeiro passo é, contudo, confirmar que **Definição spine.1** é uma definição bem sucedida. De modo mais geral, precisamos de provar que qualquer tentativa de definir por recursão transfinita (transfinita) terá êxito. Esse é o objetivo deste texto.

¹Cf. as definições de adição, multiplicação e exponenciação em ??.

Aviso: este material é delicado. A lição geral, no entanto, é bem simples: a indução transfinita mais o Esquema de Substituição garantem a legitimidade de (várias versões da) recursão transfinita.²

Definição spine.2. Seja $\tau(x)$ um termo; seja f uma função; seja α um ordinal. Dizemos que f é uma *aproximação de ordem α* para τ sse $\text{dom}(f) = \alpha$ e $(\forall \beta \in \alpha) f(\beta) = \tau(f \upharpoonright_\beta)$.

Lema spine.3 (Recursão limitada). *Para qualquer termo $\tau(x)$ e qualquer ordinal α , existe uma única aproximação de ordem α para τ .*

[sth:spine:recursion:
transrecursionfun](#)

Prova. Mostraremos que, para qualquer $\gamma \leq \alpha$, existe uma única aproximação de ordem γ .

Começamos por estabelecer a unicidade. Sejam g e h (respetivamente) aproximações de ordem γ e δ . Uma indução transfinita nos seus argumentos mostra que $g(\beta) = h(\beta)$ para qualquer $\beta \in \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h) = \gamma \cap \delta = \min(\gamma, \delta)$. Logo as aproximações são únicas (se existem) e coincidem em todos os valores.

Para estabelecer a existência, usamos agora uma indução transfinita simples (??) nos ordinais $\delta \leq \alpha$.

A função vazia é trivialmente uma aproximação de ordem $\emptyset$.

Se g é uma aproximação de ordem γ , então $g \cup \{\langle \gamma, \tau(g) \rangle\}$ é uma aproximação de ordem γ^+ .

Se γ é um ordinal limite e g_δ é uma aproximação de ordem δ para todo o $\delta < \gamma$, seja $g = \bigcup_{\delta \in \gamma} g_\delta$. Isto é uma função, pois as várias g_δ coincidem em todos os valores. E se $\delta \in \gamma$ então $g(\delta) = g_{\delta^+}(\delta) = \tau(g_\delta \upharpoonright_\delta) = \tau(g \upharpoonright_\delta)$.

Isto completa a prova por indução transfinita. $\square$

Se nos permitirmos definir um *termo* em vez de uma função, podemos retirar a cota α do resultado anterior. No enunciado e na prova do resultado seguinte, quando σ é um termo, definimos $\sigma \upharpoonright_\alpha = \{\langle \beta, \sigma(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}$.

Teorema spine.4 (Recursão geral). *Para qualquer termo $\tau(x)$, podemos definir explicitamente um termo $\sigma(x)$ tal que $\sigma(\alpha) = \tau(\sigma \upharpoonright_\alpha)$ para qualquer ordinal α .*

[sth:spine:recursion:
transrecursionschema](#)

Prova. Para cada α , por **Lema spine.3** existe uma única aproximação de ordem α , f_α , para τ . Definimos $\sigma(\alpha)$ como $f_{\alpha^+}(\alpha)$. Ora:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha) &= f_{\alpha^+}(\alpha) \\ &= \tau(f_\alpha \upharpoonright_\alpha) \\ &= \tau(\{\langle \beta, f_\alpha(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\ &= \tau(\{\langle \beta, f_{\beta^+}(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\ &= \tau(\sigma \upharpoonright_\alpha) \end{aligned}$$

notando que $f_{\beta^+}(\beta) = f_{\alpha^+}(\beta)$ para todo o $\beta < \alpha$, como no **Lema spine.3**. $\square$

²Lembrete: todas as fórmulas e termos podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).

Notemos que **Teorema spine.4** é um *esquema*. Crucialmente, não podemos esperar que σ defina uma função, isto é, um certo tipo de *conjunto*, pois então $\text{dom}(\sigma)$ seria o conjunto de todos os ordinais, contradizendo o paradoxo de Burali-Forti (??).

Ainda falta mostrar, contudo, que **Teorema spine.4** justifica a nossa definição dos V_α . Isto pode não ser óbvio de imediato; mas tornar-se-á claro com uma última versão simples da recursão transfinita.

*sth:spine:recursion:
simplerecursionschema*

Teorema spine.5 (Recursão simples). *Para quaisquer termos $\tau(x)$ e $\theta(x)$ e qualquer conjunto A , podemos definir explicitamente um termo $\sigma(x)$ tal que:*

$$\begin{aligned} \sigma(\emptyset) &= A \\ \sigma(\alpha^+) &= \tau(\sigma(\alpha)) && \text{para qualquer ordinal } \alpha \\ \sigma(\alpha) &= \theta(\text{Im}(\sigma \upharpoonright_\alpha)) && \text{quando } \alpha \text{ é um ordinal limite} \end{aligned}$$

Prova. Começamos por definir um termo, $\xi(x)$, do seguinte modo:

$$\xi(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \text{ não é uma função cujo} \\ & \text{domínio é um ordinal; caso contrário:} \\ \tau(x(\alpha)) & \text{se } \text{dom}(x) = \alpha^+ \\ \theta(\text{Im}(x)) & \text{se } \text{dom}(x) \text{ é um ordinal limite} \end{cases}$$

Por **Teorema spine.4**, existe um termo $\sigma(x)$ tal que $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma \upharpoonright_\alpha)$ para todo o ordinal α ; além disso, $\sigma \upharpoonright_\alpha$ é uma função com domínio α . Mostramos que σ tem as propriedades pretendidas, por indução transfinita simples (??).

Primeiro, $\sigma(\emptyset) = \xi(\emptyset) = A$.

Segundo, $\sigma(\alpha^+) = \xi(\sigma \upharpoonright_{\alpha^+}) = \tau(\sigma \upharpoonright_{\alpha^+}(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha))$.

Por fim, $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma \upharpoonright_\alpha) = \theta(\text{Im}(\sigma \upharpoonright_\alpha))$, quando α é limite. $\square$

Ora, para justificar **Definição spine.1**, basta tomar $A = \emptyset$, $\tau(x) = \wp(x)$ e $\theta(x) = \bigcup x$. Por fim, isto justifica a definição dos V_α !

spine.3 Propriedades básicas dos estágios

*sth:spine:Valphabasic:
sec*

Para evidenciar a importância fundacional da definição dos V_α , apresentaremos alguns resultados básicos sobre eles. Começamos com uma definição:³

Definição spine.6. O conjunto A é *potente* sse $\forall x((\exists y \in A)x \subseteq y \rightarrow x \in A)$.

*sth:spine:Valphabasic:
Valphabasicprops*

Lema spine.7. *Para cada ordinal α :*

*sth:spine:Valphabasic:
Valphatrans*

1. Cada V_α é transitivo.

*sth:spine:Valphabasic:
Valphapotent*

2. Cada V_α é potente.

*sth:spine:Valphabasic:
Valphacum*

3. Se $\gamma \in \alpha$, então $V_\gamma \in V_\alpha$ (e portanto também $V_\gamma \subseteq V_\alpha$, por (1))

³Não há terminologia padrão para «potente»; este é o nome usado por Button (2021).

Prova. Provamos isto por indução transfinita (simultânea). Para a indução, supomos que (1)–(3) valem para cada ordinal $\beta < \alpha$.

O caso $\alpha = \emptyset$ é trivial.

Suponhamos $\alpha = \beta^+$. Para mostrar (3), se $\gamma \in \alpha$ então $V_\gamma \subseteq V_\beta$ por hipótese, logo $V_\gamma \in \wp(V_\beta) = V_\alpha$. Para mostrar (2), suponhamos $A \subseteq B \in V_\alpha$, isto é, $A \subseteq B \subseteq V_\beta$; então $A \subseteq V_\beta$, logo $A \in V_\alpha$. Para mostrar (1), notemos que se $x \in A \in V_\alpha$ temos $A \subseteq V_\beta$, logo $x \in V_\beta$, logo $x \subseteq V_\beta$ pois V_β é transitivo por hipótese, e assim $x \in V_\alpha$.

Suponhamos que α é um ordinal limite. Para mostrar (3), se $\gamma \in \alpha$ então $\gamma \in \gamma^+ \in \alpha$, de modo que $V_\gamma \in V_{\gamma^+}$ por hipótese, logo $V_\gamma \in \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta = V_\alpha$. Para mostrar (1) e (2), basta observar que uma união de conjuntos transitivos (respetivamente, potentes) é transitiva (respetivamente, potente). $\square$

Lema spine.8. *Para cada ordinal α , $V_\alpha \notin V_\alpha$.*

*sth:spine:Valphabasic:
Valphanotref*

Prova. Por indução transfinita. Evidentemente $V_\emptyset \notin V_\emptyset$.

Se $V_{\alpha^+} \in V_{\alpha^+} = \wp(V_\alpha)$, então $V_{\alpha^+} \subseteq V_\alpha$; e como $V_\alpha \in V_{\alpha^+}$ por Lema spine.7, temos $V_\alpha \in V_\alpha$. Reciprocamente: se $V_\alpha \notin V_\alpha$ então $V_{\alpha^+} \notin V_{\alpha^+}$.

Se α é limite e $V_\alpha \in V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta$, então $V_\alpha \in V_\beta$ para algum $\beta \in \alpha$; mas então também $V_\beta \in V_\alpha$, logo $V_\beta \in V_\beta$ por Lema spine.7 (duas vezes). Reciprocamente, se $V_\beta \notin V_\beta$ para todo o $\beta \in \alpha$, então $V_\alpha \notin V_\alpha$. $\square$

Corolário spine.9. *Para quaisquer ordinais α, β : $\alpha \in \beta$ sse $V_\alpha \in V_\beta$*

Prova. Lema spine.7 dá um sentido. Reciprocamente, suponhamos $V_\alpha \in V_\beta$. Então $\alpha \neq \beta$ por Lema spine.8; e $\beta \notin \alpha$, pois caso contrário teríamos $V_\beta \in V_\alpha$ e logo $V_\beta \in V_\beta$ por Lema spine.7 (duas vezes), contradizendo Lema spine.8. Logo $\alpha \in \beta$ por tricotomia. $\square$

Tudo isto permite pensar em cada V_α como o α -ésimo estágio da hierarquia. Eis a razão.

Certamente os nossos V_α podem ser vistos como formados num processo *iterativo*, pois o uso de ordinais acompanha a noção de iteração. Além disso, se um estágio é formado antes do outro, isto é, $V_\beta \in V_\alpha$, isto é, $\beta \in \alpha$, então o nosso processo de formação é *cumulativo*, pois $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Finalmente, estamos de fato a formar *todas* as coleções possíveis de conjuntos que estavam disponíveis em qualquer estágio anterior, pois qualquer estágio sucessor V_{α^+} é o conjunto potência do seu predecessor V_α .

Em resumo: com $\mathbf{ZF}^-$, estamos *quase* a terminar de articular a nossa visão da hierarquia cumulativa e iterativa de conjuntos. (Embora, naturalmente, ainda precisemos de justificar o Esquema de Substituição.)

spine.4 Fundação

Estamos apenas *quase* concluídos—e não *totalmente* concluídos—porque nada em $\mathbf{ZF}^-$ garante que *tudo* o conjunto está em algum V_α , isto é, que todo o conjunto é formado em algum estágio.

*sth:spine:foundation:
sec*

Há, contudo, um sentido (matemático) bastante direto em que não *importa* se existem conjuntos fora da hierarquia. (Se os houver, podemos simplesmente ignorá-los.) Mas motivamos o nosso *conceito* de conjunto com a ideia de que todo o conjunto é formado em algum estágio (ver *Estágios-são-chave* na ??). Logo queremos excluir a possibilidade de conjuntos que caem fora da hierarquia. Por conseguinte, devemos acrescentar um novo axioma, que assegura que todo o conjunto surge em algum lugar da hierarquia.

Uma vez que os V_α são os nossos estágios, poderíamos simplesmente considerar acrescentar o seguinte como axioma:

Regularidade. $\forall A \exists \alpha A \subseteq V_\alpha$

Seria uma abordagem perfeitamente razoável. Contudo, por razões que se explicarão adiante, adotaremos antes um axioma alternativo:

Fundação (Fundação). $(\forall A \neq \emptyset)(\exists B \in A)A \cap B = \emptyset$.

Com algum trabalho, podemos mostrar (em $\mathbf{ZF}^-$) que a Fundação implica a Regularidade:

Definição spine.10. Para cada conjunto A , definimos:

$$\begin{aligned} \text{cl}_0(A) &= A, \\ \text{cl}_{n+1}(A) &= \bigcup \text{cl}_n(A), \\ \text{trcl}(A) &= \bigcup_{n < \omega} \text{cl}_n(A). \end{aligned}$$

Chamamos a $\text{trcl}(A)$ o *fecho transitivo* de A .

O nome «fecho transitivo» é adequado:

sth:spine:foundation:
subsetoftrcl **Proposição spine.11.** $A \subseteq \text{trcl}(A)$ e $\text{trcl}(A)$ é um conjunto transitivo.

Prova. Evidentemente $A = \text{cl}_0(A) \subseteq \text{trcl}(A)$. E se $x \in b \in \text{trcl}(A)$, então $b \in \text{cl}_n(A)$ para algum n , logo $x \in \text{cl}_{n+1}(A) \subseteq \text{trcl}(A)$. $\square$

sth:spine:foundation:
lem:TransitiveWellFounded **Lema spine.12.** Se A é um conjunto transitivo, então existe algum α tal que $A \subseteq V_\alpha$.

Prova. Recordando a definição de $\llsub(X)\gg$ em ??, definimos dois conjuntos:

$$\begin{aligned} D &= \{x \in A : \forall \delta x \not\subseteq V_\delta\} \\ \alpha &= \text{lsub}\{\delta : (\exists x \in A)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma \in \delta)x \not\subseteq V_\gamma)\} \end{aligned}$$

Suponhamos $D = \emptyset$. Se $x \in A$, então existe algum δ tal que $x \subseteq V_\delta$ e, pela boa ordenação dos ordinais, $(\forall \gamma \in \delta)x \not\subseteq V_\gamma$; logo $\delta \in \alpha$ e assim $x \in V_\alpha$ por **Lema spine.7**. Logo $A \subseteq V_\alpha$, como pretendido.

Basta pois mostrar que $D = \emptyset$. Por redução ao absurdo, suponhamos o contrário. Pela Fundação, existe algum $B \in D \subseteq A$ tal que $D \cap B = \emptyset$. Se $x \in B$ então $x \in A$, pois A é transitivo, e como $x \notin D$, segue que $\exists \delta \ x \subseteq V_\delta$. Seja agora

$$\beta = \text{lsub}\{\delta : (\exists x \in B)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma < \delta)x \not\subseteq V_\gamma)\}.$$

Como antes, $B \subseteq V_\beta$, contradizendo a afirmação de que $B \in D$. □

Teorema spine.13. *A Regularidade vale.*

sth:spine:foundation:
zfentailsregularity

Prova. Fixemos A ; agora $A \subseteq \text{trcl}(A)$ por **Proposição spine.11**, que é transitivo. Logo existe algum α tal que $A \subseteq \text{trcl}(A) \subseteq V_\alpha$ por **Lema spine.12** □

Estes resultados mostram que $\mathbf{ZF}^-$ prova a implicação *Fundação* $\Rightarrow$ *Regularidade*. Em **Proposição spine.22**, mostraremos que $\mathbf{ZF}^-$ prova *Regularidade* $\Rightarrow$ *Fundação*. Como tal, a Fundação e a Regularidade são *equivalentes* (módulo $\mathbf{ZF}^-$). Mas isto significa que, dado $\mathbf{ZF}^-$, podemos justificar a Fundação notando que é equivalente à Regularidade. E podemos justificar a Regularidade de imediato com base em *Estágios-são-chave*.

spine.5 $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{ZF}$: um marco

Com a Fundação, atingimos outro marco importante. Consideramos as teorias $\mathbf{Z}^-$ e $\mathbf{ZF}^-$, que dissemos ser certas teorias «menos» alguma coisa. Essa coisa é a Fundação. Logo:

sth:spine:zf:
sec

Definição spine.14. A teoria $\mathbf{Z}$ acrescenta a Fundação a $\mathbf{Z}^-$. Os seus axiomas são Extensionalidade, União, Pares, Conjuntos das Partes, Infinito, Fundação, e todas as instâncias do esquema de Separação.

A teoria $\mathbf{ZF}$ acrescenta a Fundação a $\mathbf{ZF}^-$. Por outras palavras, $\mathbf{ZF}$ acrescenta todas as instâncias de Substituição a $\mathbf{Z}$.

Ainda assim, uma pergunta pode ter surgido. Se a Regularidade é equivalente sobre $\mathbf{ZF}^-$ à Fundação, e a justificação da Regularidade é clara, por que dar voltas e tomar a Fundação como axioma básico, em vez da Regularidade?

Deixando de lado razões históricas (quem formulou o quê e quando), a razão essencial é que a Fundação pode ser apresentada sem recorrer à definição dos V_α . Essa definição dependeu de todo o trabalho na **Seção spine.2**: foi preciso provar a recursão transfinita, para mostrar que era legítima. Mas a nossa prova da recursão transfinita usou o *Esquema de Substituição*. Logo, embora a Fundação e a Regularidade sejam equivalentes módulo $\mathbf{ZF}^-$, não são equivalentes módulo $\mathbf{Z}^-$.

De fato, a questão é mais grave do que esta observação simples sugere. Embora ultrapasse o âmbito deste livro, verifica-se que tanto $\mathbf{Z}^-$ como $\mathbf{Z}$ são demasiado fracas para definir os V_α . Logo, se se trabalha apenas em $\mathbf{Z}$, então

a Regularidade (tal como a formulamos) nem sequer faz *sentido*. É por isso que o nosso axioma oficial é a Fundação, e não a Regularidade.

Daqui em diante, trabalharemos em **ZF** (salvo indicação em contrário), sem mais comentários.

spine.6 Posto

sth:spine:rank:sec Tendo definido os estágios como os V_α e sabendo que todo o conjunto é subconjunto de algum estágio, podemos definir o *posto* de um conjunto. Intuitivamente, o posto de A é o primeiro momento em que A é formado. Com mais precisão:

sth:spine:rank: defnsetrank **Definição spine.15.** Para cada conjunto A , $\text{posto}(A)$ é o menor ordinal α tal que $A \subseteq V_\alpha$.

sth:spine:rank: ranksexist **Proposição spine.16.** $\text{posto}(A)$ *existe*, para qualquer A .

Prova. Fica como exercício. $\square$

Problema spine.1. Prove **Proposição spine.16**.

A boa ordenação dos postos permite provar alguns resultados importantes:

sth:spine:rank: valphalowerrank **Proposição spine.17.** Para qualquer ordinal α , $V_\alpha = \{x : \text{posto}(x) \in \alpha\}$.

Prova. Se $\text{posto}(x) \in \alpha$ então $x \subseteq V_{\text{posto}(x)} \in V_\alpha$, logo $x \in V_\alpha$ pois V_α é potente (invocando **Lema spine.7** várias vezes). Reciprocamente, se $x \in V_\alpha$ então $x \subseteq V_\alpha$, logo $\text{posto}(x) \leq \alpha$; agora uma indução transfinita simples mostra que $x \notin V_\alpha$. $\square$

Problema spine.2. Complete a indução transfinita simples mencionada na **Proposição spine.17**.

sth:spine:rank: rankmemberslower **Proposição spine.18.** Se $B \in A$, então $\text{posto}(B) \in \text{posto}(A)$.

Prova. $A \subseteq V_{\text{posto}(A)} = \{x : \text{posto}(x) \in \text{posto}(A)\}$ por **Proposição spine.17**. $\square$

Com este fato, podemos estabelecer um resultado que nos permite provar afirmações sobre *todos os conjuntos* por uma forma de indução:

Teorema spine.19 (Esquema de indução- $\in$). Para qualquer fórmula φ :

$$\forall A((\forall x \in A)\varphi(x) \rightarrow \varphi(A)) \rightarrow \forall A\varphi(A).$$

Prova. Provaremos a contrapositiva. Suponhamos, pois, $\neg \forall A\varphi(A)$. Pela indução transfinita (??), existe algum não- φ de posto mínimo possível; isto é, algum A tal que $\neg \varphi(A)$ e $\forall x(\text{posto}(x) \in \text{posto}(A) \rightarrow \varphi(x))$. Ora, se $x \in A$ então $\text{posto}(x) \in \text{posto}(A)$, por **Proposição spine.18**, logo $\varphi(x)$; isto é, $(\forall x \in A)\varphi(x) \wedge \neg \varphi(A)$. $\square$

Eis uma forma informal de interpretar este resultado poderoso. Digamos que φ é *hereditária* sse sempre que todo o **membro** de um conjunto é φ , o próprio conjunto é φ . Então a indução- $\in$ diz o seguinte: se φ é hereditária, todo o conjunto é φ .

Para concluir a discussão dos postos (por agora), provaremos algumas afirmações que já antecipamos várias vezes.

Proposição spine.20. $\text{posto}(A) = \text{lsub}_{x \in A} \text{posto}(x)$.

*sth:spine:rank:
ranksupstrict*

Prova. Seja $\alpha = \text{lsub}_{x \in A} \text{posto}(x)$. Por **Proposição spine.18**, $\alpha \leq \text{posto}(A)$. Mas se $x \in A$ então $\text{posto}(x) \in \alpha$, logo $x \in V_\alpha$ por **Proposição spine.17**, e portanto $A \subseteq V_\alpha$, isto é, $\text{posto}(A) \leq \alpha$. Logo $\text{posto}(A) = \alpha$. $\square$

Corolário spine.21. *Para qualquer ordinal α , $\text{posto}(\alpha) = \alpha$.*

*sth:spine:rank:
ordsetrankalpha*

Prova. Suponhamos, por indução transfinita, que $\text{posto}(\beta) = \beta$ para todo o $\beta \in \alpha$. Ora, $\text{posto}(\alpha) = \text{lsub}_{\beta \in \alpha} \text{posto}(\beta) = \text{lsub}_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha$ por **Proposição spine.20**. $\square$

Finalmente, eis uma prova rápida do resultado prometido no fim de **Seção spine.4**, a saber que **ZF**[−] prova a implicação *Regularidade* $\Rightarrow$ *Fundação*. (Notemos que a noção de «posto» e **Proposição spine.18** estão disponíveis para uso nesta prova pois—como indicamos no início deste texto—podem ser apresentadas usando **ZF**[−] + Regularidade.)

Proposição spine.22 (trabalhando em **ZF[−] + Regularidade).** *A Fundação vale.*

*sth:spine:rank:
zfminusregularityfoundation*

Prova. Fixemos $A \neq \emptyset$, e algum $B \in A$ de posto mínimo possível. Se $c \in B$ então $\text{posto}(c) \in \text{posto}(B)$ por **Proposição spine.18**, logo $c \notin A$ pela escolha de B . $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas

Button, Tim. 2021. Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. *The Bulletin of Symbolic Logic* 27(4): 436–460.