

spine.1 Teorema(s) de recursão transfinita

sth:spine:recursion:
sec

O primeiro passo é, contudo, confirmar que ?? é uma definição bem sucedida. De modo mais geral, precisamos de provar que qualquer tentativa de definir por recursão transfinita (transfinita) terá êxito. Esse é o objetivo deste texto.

Aviso: este material é delicado. A lição geral, no entanto, é bem simples: a indução transfinita mais o Esquema de Substituição garantem a legitimidade de (várias versões da) recursão transfinita.¹

Definição spine.1. Seja $\tau(x)$ um termo; seja f uma função; seja α um ordinal. Dizemos que f é uma *aproximação de ordem α* para τ sse $\text{dom}(f) = \alpha$ e $(\forall \beta \in \alpha) f(\beta) = \tau(f \upharpoonright_\beta)$.

sth:spine:recursion:
transrecursionfun

Lema spine.2 (Recursão limitada). *Para qualquer termo $\tau(x)$ e qualquer ordinal α , existe uma única aproximação de ordem α para τ .*

Prova. Mostraremos que, para qualquer $\gamma \leq \alpha$, existe uma única aproximação de ordem γ .

Começamos por estabelecer a unicidade. Sejam g e h (respetivamente) aproximações de ordem γ e δ . Uma indução transfinita nos seus argumentos mostra que $g(\beta) = h(\beta)$ para qualquer $\beta \in \text{dom}(g) \cap \text{dom}(h) = \gamma \cap \delta = \min(\gamma, \delta)$. Logo as aproximações são únicas (se existem) e coincidem em todos os valores.

Para estabelecer a existência, usamos agora uma indução transfinita simples (??) nos ordinais $\delta \leq \alpha$.

A função vazia é trivialmente uma aproximação de ordem $\emptyset$.

Se g é uma aproximação de ordem γ , então $g \cup \{\langle \gamma, \tau(g) \rangle\}$ é uma aproximação de ordem γ^+ .

Se γ é um ordinal limite e g_δ é uma aproximação de ordem δ para todo o $\delta < \gamma$, seja $g = \bigcup_{\delta \in \gamma} g_\delta$. Isto é uma função, pois as várias g_δ coincidem em todos os valores. E se $\delta \in \gamma$ então $g(\delta) = g_{\delta^+}(\delta) = \tau(g_{\delta^+} \upharpoonright_\delta) = \tau(g \upharpoonright_\delta)$.

Isto completa a prova por indução transfinita. $\square$

Se nos permitirmos definir um *termo* em vez de uma função, podemos retirar a cota α do resultado anterior. No enunciado e na prova do resultado seguinte, quando σ é um termo, definimos $\sigma \upharpoonright_\alpha = \{\langle \beta, \sigma(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}$.

sth:spine:recursion:
transrecursionschema

Teorema spine.3 (Recursão geral). *Para qualquer termo $\tau(x)$, podemos definir explicitamente um termo $\sigma(x)$ tal que $\sigma(\alpha) = \tau(\sigma \upharpoonright_\alpha)$ para qualquer ordinal α .*

¹Lembrete: todas as fórmulas e termos podem ter parâmetros (salvo indicação em contrário).

Prova. Para cada α , por **Lema spine.2** existe uma única aproximação de ordem α , f_α , para τ . Definimos $\sigma(\alpha)$ como $f_{\alpha^+}(\alpha)$. Ora:

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha) &= f_{\alpha^+}(\alpha) \\ &= \tau(f_{\alpha^+} \upharpoonright_\alpha) \\ &= \tau(\{\langle \beta, f_{\alpha^+}(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\ &= \tau(\{\langle \beta, f_{\beta^+}(\beta) \rangle : \beta \in \alpha\}) \\ &= \tau(\sigma \upharpoonright_\alpha)\end{aligned}$$

notando que $f_{\beta^+}(\beta) = f_{\alpha^+}(\beta)$ para todo o $\beta < \alpha$, como no **Lema spine.2**. $\square$

Notemos que **Teorema spine.3** é um *esquema*. Crucialmente, não podemos esperar que σ defina uma função, isto é, um certo tipo de *conjunto*, pois então $\text{dom}(\sigma)$ seria o conjunto de todos os ordinais, contradizendo o paradoxo de Burali-Forti (??).

Ainda falta mostrar, contudo, que **Teorema spine.3** justifica a nossa definição dos V_α . Isto pode não ser óbvio de imediato; mas tornar-se-á claro com uma última versão simples da recursão transfinita.

Teorema spine.4 (Recursão simples). *Para quaisquer termos $\tau(x)$ e $\theta(x)$ e qualquer conjunto A , podemos definir explicitamente um termo $\sigma(x)$ tal que:* *sth:spine:recursion:simplerecursion-schema*

$$\begin{aligned}\sigma(\emptyset) &= A \\ \sigma(\alpha^+) &= \tau(\sigma(\alpha)) && \text{para qualquer ordinal } \alpha \\ \sigma(\alpha) &= \theta(\text{Im}(\sigma \upharpoonright_\alpha)) && \text{quando } \alpha \text{ é um ordinal limite}\end{aligned}$$

Prova. Começamos por definir um termo, $\xi(x)$, do seguinte modo:

$$\xi(x) = \begin{cases} A & \text{se } x \text{ não é uma função cujo} \\ & \text{domínio é um ordinal; caso contrário:} \\ \tau(x(\alpha)) & \text{se } \text{dom}(x) = \alpha^+ \\ \theta(\text{Im}(x)) & \text{se } \text{dom}(x) \text{ é um ordinal limite} \end{cases}$$

Por **Teorema spine.3**, existe um termo $\sigma(x)$ tal que $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma \upharpoonright_\alpha)$ para todo o ordinal α ; além disso, $\sigma \upharpoonright_\alpha$ é uma função com domínio α . Mostramos que σ tem as propriedades pretendidas, por indução transfinita simples (??).

Primeiro, $\sigma(\emptyset) = \xi(\emptyset) = A$.

Segundo, $\sigma(\alpha^+) = \xi(\sigma \upharpoonright_{\alpha^+}) = \tau(\sigma \upharpoonright_{\alpha^+}(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha))$.

Por fim, $\sigma(\alpha) = \xi(\sigma \upharpoonright_\alpha) = \theta(\text{Im}(\sigma \upharpoonright_\alpha))$, quando α é limite. $\square$

Ora, para justificar ??, basta tomar $A = \emptyset$, $\tau(x) = \wp(x)$ e $\theta(x) = \bigcup x$. Por fim, isto justifica a definição dos V_α !

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas