

spine.1 Posto

sth:spine:rank:
sec Tendo definido os estágios como os V_α e sabendo que todo o conjunto é subconjunto de algum estágio, podemos definir o *posto* de um conjunto. Intuitivamente, o posto de A é o primeiro momento em que A é formado. Com mais precisão:

sth:spine:rank:
defnsetrank **Definição spine.1.** Para cada conjunto A , $\text{posto}(A)$ é o menor ordinal α tal que $A \subseteq V_\alpha$.

sth:spine:rank:
ranksexist **Proposição spine.2.** $\text{posto}(A)$ existe, para qualquer A .

Prova. Fica como exercício. $\square$

Problema spine.1. Prove **Proposição spine.2**.

A boa ordenação dos postos permite provar alguns resultados importantes:

sth:spine:rank:
valphalowerrank **Proposição spine.3.** Para qualquer ordinal α , $V_\alpha = \{x : \text{posto}(x) \in \alpha\}$.

Prova. Se $\text{posto}(x) \in \alpha$ então $x \subseteq V_{\text{posto}(x)} \in V_\alpha$, logo $x \in V_\alpha$ pois V_α é potente (invocando ?? várias vezes). Reciprocamente, se $x \in V_\alpha$ então $x \subseteq V_\alpha$, logo $\text{posto}(x) \leq \alpha$; agora uma indução transfinita simples mostra que $x \notin V_\alpha$. $\square$

Problema spine.2. Complete a indução transfinita simples mencionada na **Proposição spine.3**.

sth:spine:rank:
rankmemberslower **Proposição spine.4.** Se $B \in A$, então $\text{posto}(B) \in \text{posto}(A)$.

Prova. $A \subseteq V_{\text{posto}(A)} = \{x : \text{posto}(x) \in \text{posto}(A)\}$ por **Proposição spine.3**. $\square$

Com este fato, podemos estabelecer um resultado que nos permite provar afirmações sobre *todos os conjuntos* por uma forma de indução:

Teorema spine.5 (Esquema de indução- $\in$). Para qualquer fórmula φ :

$$\forall A((\forall x \in A)\varphi(x) \rightarrow \varphi(A)) \rightarrow \forall A\varphi(A).$$

Prova. Provaremos a contrapositiva. Suponhamos, pois, $\neg \forall A\varphi(A)$. Pela indução transfinita (??), existe algum não- φ de posto mínimo possível; isto é, algum A tal que $\neg\varphi(A)$ e $\forall x(\text{posto}(x) \in \text{posto}(A) \rightarrow \varphi(x))$. Ora, se $x \in A$ então $\text{posto}(x) \in \text{posto}(A)$, por **Proposição spine.4**, logo $\varphi(x)$; isto é, $(\forall x \in A)\varphi(x) \wedge \neg\varphi(A)$. $\square$

Eis uma forma informal de interpretar este resultado poderoso. Digamos que φ é *hereditária* sse sempre que todo o **membro** de um conjunto é φ , o próprio conjunto é φ . Então a indução- $\in$ diz o seguinte: se φ é hereditária, todo o conjunto é φ .

Para concluir a discussão dos postos (por agora), provaremos algumas afirmações que já antecipamos várias vezes.

Proposição spine.6. $\text{posto}(A) = \text{lsub}_{x \in A} \text{posto}(x)$.

[sth:spine:rank:
ranksupstrict](#)

Prova. Seja $\alpha = \text{lsub}_{x \in A} \text{posto}(x)$. Por **Proposição spine.4**, $\alpha \leq \text{posto}(A)$. Mas se $x \in A$ então $\text{posto}(x) \in \alpha$, logo $x \in V_\alpha$ por **Proposição spine.3**, e portanto $A \subseteq V_\alpha$, isto é, $\text{posto}(A) \leq \alpha$. Logo $\text{posto}(A) = \alpha$. $\square$

Corolário spine.7. *Para qualquer ordinal α , $\text{posto}(\alpha) = \alpha$.*

[sth:spine:rank:
ordsetrankalpha](#)

Prova. Suponhamos, por indução transfinita, que $\text{posto}(\beta) = \beta$ para todo $\beta \in \alpha$. Ora, $\text{posto}(\alpha) = \text{lsub}_{\beta \in \alpha} \text{posto}(\beta) = \text{lsub}_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha$ por **Proposição spine.6**. $\square$

Finalmente, eis uma prova rápida do resultado prometido no fim de ??, a saber que $\mathbf{ZF}^-$ prova a implicação *Regularidade* $\Rightarrow$ *Fundação*. (Notemos que a noção de «posto» e **Proposição spine.4** estão disponíveis para uso nesta prova pois—como indicamos no início deste texto—podem ser apresentadas usando $\mathbf{ZF}^- + \text{Regularidade}$.)

Proposição spine.8 (trabalhando em $\mathbf{ZF}^- + \text{Regularidade}$). *A Fundação vale.*

[sth:spine:rank:
zfminusregularityfoundation](#)

Prova. Fixemos $A \neq \emptyset$, e algum $B \in A$ de posto mínimo possível. Se $c \in B$ então $\text{posto}(c) \in \text{posto}(B)$ por **Proposição spine.4**, logo $c \notin A$ pela escolha de B . $\square$

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas