

spine.1 Fundação

sth:spine:foundation:
sec

Estamos apenas *quase* concluídos—e não *totalmente* concluídos—porque nada em $\mathbf{ZF}^-$ garante que *todo* o conjunto está em algum V_α , isto é, que todo o conjunto é formado em algum estágio.

Há, contudo, um sentido (matemático) bastante direto em que não *importa* se existem conjuntos fora da hierarquia. (Se os houver, podemos simplesmente ignorá-los.) Mas motivamos o nosso *conceito* de conjunto com a ideia de que todo o conjunto é formado em algum estágio (ver *Estágios-são-chave* na ??). Logo queremos excluir a possibilidade de conjuntos que caem fora da hierarquia. Por conseguinte, devemos acrescentar um novo axioma, que assegura que todo o conjunto surge em algum lugar da hierarquia.

Uma vez que os V_α são os nossos estágios, poderíamos simplesmente considerar acrescentar o seguinte como axioma:

Regularidade. $\forall A \exists \alpha A \subseteq V_\alpha$

Seria uma abordagem perfeitamente razoável. Contudo, por razões que se explicarão adiante, adotaremos antes um axioma alternativo:

Fundação (Fundação). $(\forall A \neq \emptyset)(\exists B \in A)A \cap B = \emptyset$.

Com algum trabalho, podemos mostrar (em $\mathbf{ZF}^-$) que a Fundação implica a Regularidade:

Definição spine.1. Para cada conjunto A , definimos:

$$\begin{aligned} \text{cl}_0(A) &= A, \\ \text{cl}_{n+1}(A) &= \bigcup \text{cl}_n(A), \\ \text{trcl}(A) &= \bigcup_{n < \omega} \text{cl}_n(A). \end{aligned}$$

Chamamos a $\text{trcl}(A)$ o *fecho transitivo* de A .

O nome «fecho transitivo» é adequado:

sth:spine:foundation:
subsetoftrcl

Proposição spine.2. $A \subseteq \text{trcl}(A)$ e $\text{trcl}(A)$ é um conjunto transitivo.

Prova. Evidentemente $A = \text{cl}_0(A) \subseteq \text{trcl}(A)$. E se $x \in b \in \text{trcl}(A)$, então $b \in \text{cl}_n(A)$ para algum n , logo $x \in \text{cl}_{n+1}(A) \subseteq \text{trcl}(A)$. $\square$

sth:spine:foundation:
lem:TransitiveWellFounded

Lema spine.3. Se A é um conjunto transitivo, então existe algum α tal que $A \subseteq V_\alpha$.

Prova. Recordando a definição de $\llsub(X)\gg$ em ??, definimos dois conjuntos:

$$D = \{x \in A : \forall \delta \ x \not\subseteq V_\delta\}$$

$$\alpha = \text{lsub}\{\delta : (\exists x \in A)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma \in \delta)x \not\subseteq V_\gamma)\}$$

Suponhamos $D = \emptyset$. Se $x \in A$, então existe algum δ tal que $x \subseteq V_\delta$ e, pela boa ordenação dos ordinais, $(\forall \gamma \in \delta)x \not\subseteq V_\gamma$; logo $\delta \in \alpha$ e assim $x \in V_\alpha$ por ??. Logo $A \subseteq V_\alpha$, como pretendido.

Basta pois mostrar que $D = \emptyset$. Por redução ao absurdo, suponhamos o contrário. Pela Fundação, existe algum $B \in D \subseteq A$ tal que $D \cap B = \emptyset$. Se $x \in B$ então $x \in A$, pois A é transitivo, e como $x \notin D$, segue que $\exists \delta \ x \subseteq V_\delta$. Seja agora

$$\beta = \text{lsub}\{\delta : (\exists x \in B)(x \subseteq V_\delta \wedge (\forall \gamma < \delta)x \not\subseteq V_\gamma)\}.$$

Como antes, $B \subseteq V_\beta$, contradizendo a afirmação de que $B \in D$. □

Teorema spine.4. *A Regularidade vale.*

*sth:spine:foundation:
zfentailsregularity*

Prova. Fixemos A ; agora $A \subseteq \text{trcl}(A)$ por **Proposição spine.2**, que é transitivo. Logo existe algum α tal que $A \subseteq \text{trcl}(A) \subseteq V_\alpha$ por **Lema spine.3** □

Estes resultados mostram que $\mathbf{ZF}^-$ prova a implicação *Fundação* $\Rightarrow$ *Regularidade*. Em ??, mostraremos que $\mathbf{ZF}^-$ prova *Regularidade* $\Rightarrow$ *Fundação*. Como tal, a Fundação e a Regularidade são *equivalentes* (módulo $\mathbf{ZF}^-$). Mas isto significa que, dado $\mathbf{ZF}^-$, podemos justificar a Fundação notando que é equivalente à Regularidade. E podemos justificar a Regularidade de imediato com base em *Estágios-são-chave*.

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas