

replacement.1 A Força da Substituição

sth:replacement:strength:
sec

Começamos com uma observação simples sobre a força da Substituição: a menos que ultrapassemos $\mathbf{Z}$, não podemos provar a existência de qualquer ordinal de von Neumann maior ou igual a $\omega + \omega$.

Eis um esboço do porquê. Trabalhando em $\mathbf{ZF}$, consideremos o conjunto $V_{\omega+\omega}$. Este conjunto serve como domínio de um *modelo* para $\mathbf{Z}$. Para ver isto, introduzimos alguma notação para a *relativização* de uma fórmula:

sth:replacement:strength:
formularelativization

Definição replacement.1. Para qualquer conjunto M , e qualquer fórmula φ , seja φ^M a fórmula que resulta de restringir todos os quantificadores de φ a M . Isto é, substituir “ $\exists x$ ” por “ $(\exists x \in M)$ ”, e substituir “ $\forall x$ ” por “ $(\forall x \in M)$ ”.

Pode mostrar-se que, para todo o axioma φ de $\mathbf{Z}$, tem-se $\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{V_{\omega+\omega}}$. Mas $\omega + \omega$ não está em $V_{\omega+\omega}$, por ???. Logo $\mathbf{Z}$ é consistente com a não existência de $\omega + \omega$.

Foi por isso que dissemos, na ???, que ??? não pode ser provado sem Substituição. Pois é fácil, dentro de $\mathbf{Z}$, definir uma boa ordenação explícita que intuitivamente *deveria* ter tipo de ordem $\omega + \omega$. De fato, demos um exemplo informal disto em ???, quando apresentamos a ordenação nos números naturais dada por:

$$n < m \text{ sse ou } n < m \text{ e } m - n \text{ é par,} \\ \text{ou } n \text{ é par e } m \text{ é ímpar.}$$

Mas se $\omega + \omega$ não existe, esta boa ordenação não é isomorfa a nenhum ordinal. Logo $\mathbf{Z}$ não prova ???.

Invertendo o prisma: a Substituição permite provar a existência de $\omega + \omega$, e portanto tem de permitir provar a existência de $V_{\omega+\omega}$. E não só. Para *qualquer* boa ordenação que possamos definir, ??? nos diz que existe algum α isomorfo com essa boa ordenação, e portanto que V_α existe. De forma direta, então, a Substituição garante que a hierarquia de conjuntos tem de ser *muito alta*.

Nas próximas partes do capítulo, e de novo em ???, teremos uma ideia mais clara de quão *alta* a Substituição força a hierarquia a ser. O ponto simples, por agora, é que a Substituição *precisa* mesmo de justificação!

Créditos das Imagens

Referências Bibliográficas